

THESE

présentée
à

L'UNIVERSITE PARIS 7

U.F. de Didactique des Disciplines

pour obtenir le grade de

DOCTEUR d'ETAT ès SCIENCES
(mention : Didactique des Mathématiques)

par

Bernard DUMONT

sur

QUESTIONNEMENTS
et
INTERPRETATION des ERREURS
en
MATHEMATIQUES

(Elaboration de modèles pour la compréhension
des comportements de réponse
et
la construction d'outils pédagogiques
à supports technologiques)

Soutenue le 20 janvier 1989

Membres du jury :

G. DELACOTE	Président
D. LACOMBE	Directeur de Recherche
J. CHASTENET de GERY	Rapporteur
R. CUPPENS	"
D. LECLERCQ	"
T. O'SHEA	"
J. ADDA	Examineur
J. CARDINET	"
A. REVUZ	"

*Pour mes Parents,
Avec toute mon affection
et ma reconnaissance*

Je remercie bien vivement Goëry DELACOTE pour avoir accepté de présider ce Jury, mais aussi, en tant que Président du Conseil Scientifique de l'I.N.R.P., pour m'avoir encouragé, depuis mon entrée dans cet institut, à mener à bien la rédaction de cette thèse.

Je remercie Josette ADDA, Jérôme CHASTENET de GERY et André REVUZ pour avoir bien voulu lire mon travail et me donner, avec leur sens critique bien connu, de très nombreux conseils, comme ils l'avaient déjà fort aimablement fait pour ma thèse de 3ème cycle.

Je remercie Roger CUPPENS pour la minutie avec laquelle il a examiné et critiqué les multiples pré-éditions de cette thèse et pour le regard neuf qu'il a porté sur de nombreux aspects de mes travaux, en particulier ceux relatifs à l'Intelligence Artificielle.

Je remercie mes collègues étrangers, Jean CARDINET, Dieudonné LECLERCQ et Tim O'SHEA, pour l'ouverture qu'ils m'ont permis de donner à cette thèse grâce à leurs nombreux et pertinents conseils et remarques.

Il serait injuste de limiter mes remerciements aux membres du jury alors que tant d'autres m'ont aidé à mener à bien ce travail; je voudrais citer en particulier :

les directeurs de l'I.N.R.P., Francine BEST, Pierre DELORME et Francine DUGAST, qui m'ont donné toute facilité pour "gérer" au mieux mon temps de recherche personnelle,

le secrétaire général de l'I.N.R.P., Jean-Claude GUY, qui, depuis mon arrivée à D.P.5 jusqu'à l'organisation de cette soutenance, a tout fait pour m'obtenir les meilleures conditions de travail,

mes collègues de D.P.5, qui ont fait preuve d'une grande patience lors de mes nombreuses indisponibilités occasionnées par la rédaction de ma thèse, et tout spécialement :

Ginette ECHAVIDRE, coordonnateur administratif, pour son efficacité à trouver, avec le sourire, des solutions aux multiples problèmes que mon travail de recherche lui a posés,

Martine BACHELOT, secrétaire de direction, tant pour l'aide technique que pour le soutien amical qu'elle m'a offerts sans compter,

Nicole PORS-GUILBERT, documentaliste, pour la célérité et l'efficacité avec laquelle elle a toujours réussi à trouver les articles et les ouvrages dont j'avais besoin,

Jean-François BOUDINOT, chercheur, pour son soutien logistique et la mise en page du document définitif.

A tous, j'adresse mes très sincères remerciements.

*"Partons donc : nous voulons, les deux, la même chose.
Toi, tu seras le chef et le guide et le maître."
Et sur ce, reprenant la marche interrompue,
j'entrai dans le pénible et sauvage chemin.*

DANTE, L'enfer, Chant II

Je ne voudrais pas me contenter de "remerciements" pour exprimer publiquement à Daniel LACOMBE ce que je lui dois.

Contrairement à la paternité "naturelle", pour laquelle je ne pense pas que l'enfant ait quelque dette envers un géniteur qu'il n'a ni demandé ni choisi, la filiation spirituelle repose, d'un côté, sur une adhésion et, de l'autre, sur une acceptation. Je précise, au chapitre 0, que, sans ce "coup de foudre intellectuel" de 1976, je n'aurais peut-être jamais eu le goût de mener des recherches en didactique des mathématiques. Mais, réciproquement, cette thèse n'existerait pas si Daniel LACOMBE n'avait accepté d'investir un nombre incalculable d'heures à me faire comprendre quelques rudiments de logique, à me donner une foule d'idées sur le langage mathématique et à me faire des remarques pertinentes pour rédiger des tests ou en analyser les résultats.

Elle n'existerait pas non plus sans la patience admirable et l'humour décapant avec lesquels il a lu, relu et critiqué les (n+1) versions des différents chapitres, présentés, qui plus est, dans le désordre !

Après plus de douze années de travail d'équipe,
au moment où je vais cesser d'être, officiellement,
son étudiant, qu'il me soit permis de formuler
un vœux : que je puisse, avec Daniel LACOMBE,
apprendre encore.

CHAPITRE 0

...

POINTS DE REPERE

POUR

UN ITINERAIRE

...

Pour aider le lecteur dans sa compréhension d'un itinéraire de plus de dix années de recherche en didactique des mathématiques nous avons pensé lui indiquer quelques points de repère sur un curriculum vitæ dont la linéarité, autre que temporelle, n'est pas évidente.

D'un pays à l'autre, d'une activité à l'autre, trois points fixes restent présents :

- **faire comprendre les mathématiques**
- **comprendre ceux qui ne comprennent pas**
- **trouver des outils pour faire comprendre.**

La passion de l'enseignement, c'est d'abord celle des "cours-répétition" des jeudis après-midi (les "mercredis" d'alors!) pour mes camarades du collège qui me font découvrir qu'il existe des notions évidentes pour moi et nécessitant pour eux de nombreuses explications et variations sur ces explications.

C'est ensuite celle des cours particuliers où je tâche, en clinicien inconscient et en didacticien en herbe, de comprendre ce qui se passe dans la tête d'enfants qui haïssent les mathématiques et qui sont insupportables pour mes futurs collègues professeurs de mathématiques.

Après avoir goûté pendant deux ans aux joies des classes préparatoires et de l'internat au lycée Henri IV, je passe une maîtrise de mathématiques à Orsay (avec un certificat de préparation à l'enseignement sous la responsabilité de Henri CARTAN) et me présente au C.A.P.E.S. en 1973. Grâce au C.P.R., pour la première fois il m'est donné d'entrer dans une vraie classe en tant que professeur. L'un de mes trois conseillers pédagogiques m'y donne l'unique conseil pédagogique jusqu'ici mémorisé (en raison sans doute de mon goût pour la technologie au service de l'enseignement) : bien choisir la couleur des craies et éviter la craie bleue, peu lisible de loin !

Dans le même temps, la préparation à l'agrégation à Paris 11 (Orsay) me donne l'occasion de fréquenter un vrai mathématicien, Alexander GROTHENDIECK, déjà atteint du virus anti-nucléaire anti-fonctionnaire anti-concours, un vrai pédagogue, Pierre SAMUEL qui, avec la simplicité du paysan se grattant le crâne -chauve- à longueur de cours, m'apprend à aimer l'algèbre...et à réussir à l'agrégation, et un vrai collègue, Jacques WEBER, dont l'amitié, depuis, m'est toujours restée aussi précieuse.

L'année suivante (1974-75) m'offre enfin, au lycée Fresnel de Paris, des élèves (terminale G et techniciens supérieurs) à part entière avant de me rendre "sous les drapeaux". Ce sont ceux de l'E.S.A.M. de Bourges où j'enseigne les mathématiques aux officiers du

Matériel de l'Armée de terre. C'est aussi mon premier contact d'enseignant avec des adultes, préoccupation qui ne m'a depuis lors pas quitté (préparation à l'E.S.E.U. à Paris 7, tests pour l'entrée au C.N.A.M., E.A.O. sur le système PLATO™, cours à la Télé-université du Québec). En même temps, et sur le conseil de Jacques WEBER, je fais la connaissance de l'U.E.R. de Didactique des Disciplines de Paris 7...et de Daniel LACOMBE : le choc : ma thèse sera avec lui ou elle ne sera pas ! C'est aussi la rencontre avec Josette ADDA et son intérêt pour les questionnements et leur habillage. Sur leur conseil, je décide de faire passer mes premiers tests de "logique" , d'après ceux, à l'époque célèbres, de WASON sur les cartes (<WAS68>) au public disponible pour moi: les militaires.

Je suis au cœur du problème : les questionnements ne sont pas neutres, alors comment poser des questions? Comment comprendre les réponses?

L'intérêt soulevé par ce premier essai justifie la recherche d'un accord entre Paris 7 et le Ministère de la Défense en vue de faire passer des tests, centrés sur l'implication, au Centre de Sélection de Vincennes.

Cette deuxième (et dernière) année de D.E.A. correspond aussi au début d'autres activités. Tout d'abord ma nomination en terminale E au lycée technique de Melun (Seine et Marne) où j'essaie de mettre en place des activités pouvant modifier chez les élèves l'image des mathématiques et celle du professeur de mathématiques (semaine de préparation du baccalauréat à la montagne en mai). Début aussi de mes premières activités dans le domaine de l'informatique, à l'E.S.I.E.E. tout d'abord, où je réalise une expérience de contrôle de connaissances en analyse pour les élèves de 1ère année, en utilisant un langage-auteur, DECAL™, sur "gros" ordinateur (PDP.11-70). Ce travail me conduit à une première prise en compte des problèmes posés par l'informatisation des questionnements (<DUM77>) : en particulier celui des réponses prétendument ouvertes et celui des Q.C.M..

Autre expérience, suite à la rencontre avec Jérôme CHASTENET de GERY et Serge HOCQUENGHEM, celle de la création d'un "didactimagiciel"(!) sur les coniques (propriétés fondamentales, applications, exemples "naturels") ayant pour support logistique une machine MITSU™ (maintenant à Rouen au Musée de l'Education de l'I.N.R.P.); ma problématique étant -quelques années après les premiers films scientifiques et quelques années avant les vidéodisques et les images numériques- de faire "voir" des choses en mathématiques et de rapprocher celles-ci de domaines aussi variés que la physique des ondes (lumière, son), l'astronomie et l'architecture; mais au niveau de l'interactivité et du questionnement (qui est à la base du dialogue) on peut difficilement faire moins bien !

En septembre 1978, André REVUZ me fait entrer à l'I.R.E.M. Paris-Sud. J'en profite pour lancer une animation en Seine-et-Marne avec, en particulier, la création d'une antenne départementale de l'A.P.M.E.P. localisée à l'Ecole Normale de Melun.

A la même époque le Ministère de la Défense donne son feu vert pour commencer l'expérimentation au Centre de Vincennes. Le travail a été préparé depuis plusieurs mois, les tests de cartes ont été à nouveau remaniés et d'autres sur l'implication sont venus compléter l'étude : quelle influence sur le comportement de réponse joue le décor de tous ces tests supposés aptes à évaluer la "logique" des testés (<O'BR 71,72,73,75>) ou -pire- leur capacité à poursuivre des études en mathématiques (<PEL75>)? L'analyse de plus de 2500 tests conduit en janvier 1980 à la soutenance de ma thèse de 3ème cycle (<DUM80a>) et à divers articles. Mais outre le problème, que je pense avoir mis en lumière, sur l'incapacité de telles épreuves à rendre compte de ce que certains appellent "raisonnement formel" (<LON67>) ou à être utilisées pour repérer les futurs mathématiciens, d'autres considérations m'amènent à développer mes recherches dans de nouvelles directions complémentaires : la formulation des questions, les questionnaires fermés, l'utilisation de supports informatisés, les grandes populations.

1980 est une année charnière : thèse de 3ème cycle (janvier), fin de l'enseignement au lycée de Melun (juin), premier contact avec les U.S.A. (août), nomination à l'Ecole Normale Supérieure de Tunis (septembre), début de la collaboration avec la firme EUROFORMATIQUE (octobre). L'I.R.E.M. m'ayant permis de participer au 4ème Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques (I.C.M.E. IV), à Berkeley, j'obtiens de l'E.S.I.E.E. une mission complémentaire afin de visiter divers centres spécialisés dans l'utilisation de l'informatique pour l'enseignement. Je me rends ainsi à BOSTON (M.I.T.), à SAN DIEGO et, beaucoup plus intéressant, à URBANA où je découvre PLATO™. C'est pour moi un choc dans ma recherche d'un support informatique capable d'assurer un dialogue minimal entre un logiciel d'E.A.O. et un apprenant. Je trouve enfin un langage et un ordinateur pensés pour l'éducation et non une tentative d'adapter pour l'éducation du matériel destiné à l'industrie ou au tertiaire. C'est cette découverte qui me poussera vers un projet de collaboration avec EUROFORMATIQUE (qui sera ultérieurement impliqué dans le projet DIANE) pour la création d'une douzaine d'heures de didacticiels sur le système PLATO™ en formation d'adultes (pour l'E.S.I.E.E.): nombres complexes, équations du second degré, systèmes linéaires d'équations. Cette création me permet, d'une part, d'expérimenter la collaboration didacticien-informaticien et, d'autre part, de réfléchir aux problèmes de la présentation à l'écran et de la reconnaissance, dans les réponses des élèves, d'expressions mathématiques, points sur lesquels PLATO™ fut longtemps le plus évolué (<DUM 82a>).

Une mission au Québec proposée, en septembre 1981, par l'U.E.R. de Didactique des Disciplines, me permettra de compléter ma connaissance de ce système, principalement au point de vue du travail en réseau, et sera l'occasion de ma première rencontre avec ceux qui allaient devenir trois ans plus tard mes collègues de Télé-université.

De septembre 1980 à août 1982, j'enseigne à l'Ecole Normale Supérieure de Tunis: l'algèbre en 1ère année (niveau 1ère année de D.E.U.G.), les probabilités et la didactique des mathématiques aux élèves de 4ème (et dernière) année (niveau maîtrise) qui assurent déjà, à temps partiel, un enseignement dans le secondaire. Je regrette de ne pas pouvoir conduire mon enseignement de didactique comme je le souhaiterais: d'une part, résistance des autorités qui refusent de voir étudiée la situation induite par l'introduction de l'arabe comme langue d'enseignement pour les mathématiques en 6ème pour des élèves ayant vécu cela dès le primaire mais avec des enseignants ayant toujours fait des mathématiques en français, et, d'autre part, résistance des élèves-maîtres refusant une image de l'enseignant autre que celle d'un détenteur infaillible d'un savoir complet entièrement cohérent à l'intérieur d'un système formel fermé.

De retour en France en 1982, je suis mis à la disposition de l'U.E.R. de Didactique des Disciplines de Paris 7 pour la réalisation de Tests Assistés par Ordinateur (dans le même temps j'assure un cours de préparation à l'E.S.E.U.). L'équipe est associée aux chercheurs du C.R.E.E.M. au C.N.A.M.. Le but à long terme de cette recherche est la réalisation d'une banque ramifiée de tests auto-évaluatifs/auto-correctifs assistés par ordinateur. Ces tests seraient destinés à fournir à l'utilisateur, d'une manière autonome, d'une part un diagnostic des erreurs commises lors de la passation d'un certain nombre d'exercices et, d'autre part, une correction de ces fautes. Le travail commence par une enquête nationale papier-crayon sur le calcul des fractions. Elle touche près de 4000 élèves et permet de dresser une liste d'exercices plus ou moins piègeants mais surtout une synthèse des erreurs réellement produites, une hiérarchie de celles-ci et les conditions d'apparition (cf. <DUM84a>). A partir de cette recherche, un prototype de didacticiel est créé sur MICRAL-22G™, en Basic. Sa lourdeur provient du langage utilisé, gérant difficilement les dialogues utilisateur/machine, mais aussi de la nécessité de prévoir toutes les réponses possibles (nous reviendrons sur ce point ultérieurement). A cette occasion nous avons aussi beaucoup réfléchi au problème posé par les affichages à l'écran (in <HOC83>), problème déjà soulevé pour DECAL™ (in <DUM77>) et pour PLATO™ (in <DUM82a>).

Ces deux années (1982-84) sont aussi consacrées à diverses enquêtes de grande ampleur sur les variables, l'une sur "lettres et tableaux de valeurs" et l'autre sur "lettres et quantification". Je participe, dans le même ordre d'idée, à la préparation d'un Q.C.M. en

mathématiques destiné à l'orientation des étudiants à l'entrée du C.N.A.M.. Nous avons recours, pour le dépouillement de tous ces travaux à grande échelle, à l'informatique (logiciel d-Base II™).

En 1983 l'U.E.R. de Didactique des Disciplines m'envoie en mission en Angleterre afin d'étudier l'implantation de la micro-informatique dans le monde de l'éducation (cf. <DUM83>). Je suis particulièrement frappé par l'existence d'un projet du Ministère de l'Education doublement ouvert: d'une part sur les partenaires (Ministère de l'Industrie, constructeurs privés de matériels informatiques, B.B.C.) et, d'autre part, sur le public visé (scolaire et extra-scolaire, jeunes et adultes). C'est d'ailleurs le même état d'esprit (et le même recours au multi-média) que je retrouverai en 1986 lors de ma visite à l'Open University.

En 1982 Jacques WEBER met au point son idée d'un concours en mathématiques et en physique à l'entrée à l'E.S.I.E.E., la sélection se faisant jusqu'alors uniquement sur dossiers et tests psychotechniques. Devant les problèmes posés par la nécessité de corriger les épreuves de près d'un millier de candidats dans un délai relativement court, la proposition d'utiliser un Q.C.M. est retenue. Depuis 1983, et encore présentement, le texte du concours est rédigé par un groupe d'enseignants (E.S.I.E.E. et Secondaire) auquel je suis associé. Les résultats sont stockés sur ordinateur, la correction est faite automatiquement suivant une liste d'équations de correction mise au point par le même groupe d'enseignants après essai sur une population témoin. A la suite de l'analyse globale et exercice par exercice des résultats, je rédige chaque année un rapport (sauf en 1985, où il est rédigé par mon collègue Jean-Paul RIGAUD) publié par l'Ecole et envoyé à tous les professeurs de terminale ayant présenté des candidats. Ce n'est qu'en 1984 que le concours prend sa forme définitive, à savoir 30 questions à choix multiple en 2 heures pour lesquelles les candidats sont invités à répondre par V (vrai) ou F (faux). L'effet principal de l'existence de ce concours est sans conteste l'augmentation du nombre et de la qualité des dossiers présentés pour la pré-sélection. Un autre effet, non négligeable, est qu'un nombre de plus en plus grand de candidats bien classés au concours préfèrent entrer à l'Ecole plutôt qu'en classe préparatoire, le concours ayant contribué à modifier l'image de l'Ecole dans la population "cible". Pour le didacticien, un tel concours est une mine de renseignements, ponctuellement, par l'analyse a posteriori de tel ou tel exercice dont les résultats infirment ou confirment nos prévisions, mais aussi dans le temps, en comparant à quelques années d'intervalles les performances des élèves sur des exercices similaires. De même, alors que la forme du concours n'a pas évolué depuis 1984, en revanche la manière de construire les exercices, de choisir les réponses et d'établir les équations de correction ont beaucoup intégré de nos éléments de réflexion, en particulier au niveau de la mise en évidence de contradictions logiques ou de la mise en place de moyens de contrôle (s'assurer que telle "bonne" réponse n'a pas été choisie pour une "mauvaise" raison).

En août 1984, je me joins à la Délégation Française à Adélaïde, en Australie, pour le 5ème Congrès de l'I.C.M.E. où je présente les travaux de notre équipe sur les fractions. En octobre 1984, répondant à l'invitation de Claude RIGAULT, Directrice de la Formation à Télé-université (Université du Québec), je traverse l'Atlantique pour assurer la Direction des Programmes en Informatique puis du module Sciences et Technologie. C'est pour moi l'occasion d'élargir mon champ d'intérêt, d'une part quant au public, à savoir des adultes à distance, et, d'autre part, quant à une approche des différents médias disponibles et leur complémentarité pour le transfert de connaissances, leur assimilation et leur contrôle. C'est aussi un nouveau domaine à découvrir : la gestion des ressources humaines et matérielles. La présence toute proche des Etats-Unis et les possibilités de déplacement me permettent de prendre conscience de l'essor de technologies nouvelles en éducation en Amérique du Nord. Pendant mon séjour à la Télé-université, l'U.N.E.S.C.O. me charge d'une étude sur le téléchargement des logiciels éducatifs (cf. <DUM85>) et me convie, à titre d'expert, à un symposium international organisé conjointement avec la School of Education, à Stanford University, sur "Computers in Education: the role of International Research". A cette occasion je fais la connaissance de John SLEEMAN. Outre mes responsabilités de coordination des équipes, je prends la direction personnellement de deux cours, l'un sur les systèmes-auteurs et l'autre sur l'Intelligence Artificielle appliquée à l'éducation, cours que mon collègue Gilbert PAQUETTE vient d'achever. J'entre ainsi en contact, par l'intérieur, avec la création puis la gestion d'un cours par correspondance. Dans le premier de ces cours, la part consacrée à l'analyse des réponses et à la réflexion sur les questionnements est très importante; ces cours sont destinés à des enseignants désireux de construire leurs propres didacticiels et je trouve là l'occasion de transposer ma recherche en didactique des mathématiques à d'autres disciplines. L'un des trois systèmes étudiés dans ce cours, EGO™, est d'ailleurs né en France et les possibilités de création de questionnaires paramétrés (avec graphismes et calculs associés) mettent en évidence ce que l'informatique est capable d'offrir -pour un prix raisonnable- lorsque son utilisation a été méditée au préalable par un didacticien-enseignant.

Tout en travaillant au Québec je poursuis, à Paris 6, une seconde année de D.E.A. en Intelligence Artificielle, avec Norbert COT et Gérard SABBAH, où je me familiarise avec les systèmes-experts et différentes méthodes d'analyse de problèmes fort éloignées de celles de l'informatique traditionnelle.

J'y vois, pour l'orientation générale de mes recherches, deux pistes intéressantes:

- a) une meilleure gestion du dialogue apprenant/machine permettant de personnaliser les interventions et d'éviter au maximum les incompréhensions au niveau des questions dites -à tort- ouvertes,

- b) une compréhension des comportements erronés par la mise en œuvre d'une banque de règles fausses permettant un diagnostic puis le cas échéant une procédure de remédiation (cf. <BRO81>).

Je rentre en France en septembre 1986, en tant que chercheur en didactique des mathématiques, à l'I.N.R.P. (Direction de Programme 1 : Didactique des Enseignements Généraux). J'y lance une pré-enquête sur la notion de limite : le programme des terminales scientifiques a, en particulier sur ce point, été notablement modifié et a d'ailleurs donné lieu à des commentaires développés de la part de l'Inspection Générale de Mathématiques. La disparition du formalisme et un allègement important de la présentation théorique de cette difficile notion, parallèlement à une obligation pour les enseignants de terminale de faire utiliser des calculatrices à leurs élèves, ont-elles amélioré leur compréhension ? Cette pré-enquête a été aussi menée auprès des élèves de 1ère année de l'E.S.I.E.E. et d'étudiants de différents niveaux de Paris 7.

En 1986, sur une idée (encore!) de Jacques WEBER, l'E.S.I.E.E. accepte le projet d'un colloque international sur la formation, l'évaluation et la sélection par questionnaire fermés, qui se déroulera dans les nouveaux locaux de l'Ecole, à Marne-la-Vallée. J'assure l'organisation de cette manifestation, conjointement avec Jacques WEBER et Leïla REILLE.

En janvier 1987, je me vois confier à l'I.N.R.P. la Direction de Programme 5 (Technologies Nouvelles et Enseignement). Quant aux recherches qui me concernent personnellement, ce sont :

- a) Avec Jacques COLOMB, Directeur de DP1, nous décidons de prolonger ma réflexion initiale sur les limites par une recherche I.N.R.P., conjointe à DP1 et à DP5, intitulée "Limites et infini" (n°180.87.89), où nous souhaitons aborder à la fois des aspects didactiques, sur un approfondissement de la compréhension de ces notions et sur leur présentation, et sur des aspects technologiques, comme l'utilisation de logiciels de "zoom" ou de calculatrices programmables,

- b) Une autre recherche, "Q.C.M. Télématique" (n°183.87.90), à laquelle Gilbert SOL est associé, étudie les problèmes posés par ce support dans l'utilisation de Q.C.M. en anglais et en mathématiques. Pour cette dernière discipline nous partons des textes des précédents concours de l'E.S.I.E.E. pour lesquels nous avons déjà une information considérable sur le comportement des élèves de terminale. Nous souhaitons l'utiliser pour accélérer le traitement des réponses et pour centrer notre attention sur des exercices pertinents et des choix de réponses attractifs et significatifs. Les problèmes techniques sont importants mais soulèvent aussi des questions plus pédagogiques comme, par exemple, la quantité d'information

transmissible sur un écran, le choix des notations lié à l'absence de certains symboles mathématiques, les stratégies possibles pour un utilisateur,

c) la dernière recherche porte sur les applications des méthodes d'intelligence artificielle au raisonnement en mathématiques (n°179.87.90). Trois volets y sont présents : peut-on utiliser le logiciel BUGGY (cf. <BRO81>) aussi bien en formation des maîtres qu'en collège? Quelles interfaces et quels environnements faut-il créer pour utiliser en terminale scientifique une version micro de CAMELIA (cf. <VIV84>)? Peut-on construire un système-expert de diagnostic d'erreurs sur les fractions à partir de l'enquête, déjà mentionnée, menée dans les collèges et les lycées ? Nous construisons une base de règles de réécriture des fractions, règles vraies et règles fausses, à l'aide du système-expert NEXPERT™ de la société Neuron Data qui, de par sa conception de langage "orienté-objet", devrait permettre la manipulation de types (fraction, addition de fractions,...).

Ces trois recherches ont été approuvées par le Conseil scientifique de l'I.N.R.P. au printemps 1987 et ont commencé à l'automne de la même année.

Depuis mon entrée à DP5, j'ai été amené à participer à diverses manifestations et organisations. Dans mon domaine initial de recherche, la didactique des mathématiques, je suis co-opté par les membres du sous-groupe "Informatics and the teaching of Mathematics" de l'I.F.I.P. lors de sa réunion à Sofia (Bulgarie), en mai 1987, et invité comme conférencier lors de l'université d'été de Toulouse sur "Intelligence Artificielle et mathématiques" à Toulouse en juillet. Dans le domaine des technologies nouvelles, je suis invité à titre d'expert par le Conseil de l'Europe lors de l'"Atelier de Recherche Pédagogique sur l'apprentissage en interaction et les Nouvelles Technologies", en juin à Eindhoven (NL), puis par les Pays-Bas lors de la mise en place du projet national POCO de construction de logiciels éducatifs, en septembre à Enschede. Enfin, dans le cadre de mon travail sur l'enseignement à distance, j'interviens, en janvier 1987, au séminaire du C.N.E.D.. Durant l'été, en tant qu'expert auprès d'E.D.F.-G.D.F. pour son audit sur les cours par correspondance, j'ai la responsabilité, d'une part, de mener une enquête auprès des concepteurs et des correcteurs et, d'autre part, d'évaluer, du point de vue d'une pédagogie à distance, quatre cours diffusés par cette entreprise. Présentement je participe, à E.D.F.-G.D.F., à un groupe de pilotage pour la création de deux cours expérimentaux à distance voulant intégrer de manière "réfléchie", la télématique. Cette opération fait suite à l'audit et est destinée à explorer des pistes pour remédier aux difficultés rencontrées dans la diffusion des cours par correspondance.

L'été 1988 me conduit en Amérique du Sud et, plus particulièrement, en Uruguay où la France a été sollicitée pour un projet de création d'un institut de recherche pédagogique, l'I.N.I.P.. J'y anime un stage de formation sur les Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication (N.T.I.C.) dans l'éducation pour les 40 futurs responsables de recherches. C'est aussi pour moi l'occasion de faire part de mon expérience d'enseignement à distance; l'Ambassade de France à Montevideo souhaite en effet recourir à ce type d'enseignement pour répondre à la demande du Ministère Uruguayen de l'Education et de la Culture d'une formation de professeurs de français (notre langue étant devenue récemment langue vivante obligatoire pendant les trois premières années du secondaire).

Je fais partie de la délégation française au séminaire international organisé à Paris, en octobre, par l'O.C.D.E. sur "l'analyse et l'évaluation des logiciels d'enseignement : tendance et problèmes", afin d'y représenter l'I.N.R.P. et intervenir, en particulier, sur les aspects "recherche" et "Intelligence Artificielle".

En novembre, j'assure deux semaines de formation dans les domaines des N.T.I.C. et de l'E.A.D., à l'invitation de l'Ambassade de France à Buenos-Aires, pour les responsables des centres régionaux argentins de ressources audiovisuelles et informatiques.

Et, pour terminer 1988, j'anime un stage sur la création de logiciels éducatifs à Rabat, à la demande des Autorités marocaines.

CHAPITRE I

IDEES, PRINCIPES

&

METHODES

Au début du chapitre 0, sur les points de repère dans mon itinéraire, je cite trois éléments essentiels qui guident mon travail :

- **faire comprendre les mathématiques**
- **comprendre ceux qui ne comprennent pas**
- **trouver des outils pour faire comprendre,**

avec, comme personnage central, **l'apprenant**.

J'emploie ce terme - plus courant au Québec qu'en France - parce qu'il me permet de regrouper tous les âges et tous les types de personnes en situation d'apprentissage :

- élèves, étudiants, adultes en formation,
- formation initiale, formation continue,
- formation face à face, formation à distance.

J'utilise à dessein un même mot "comprendre" pour des acteurs différents : dans le premier cas je parle des apprenants, dans le deuxième cas je parle des enseignants vis à vis des apprenants, dans le dernier cas je pense à la fois aux enseignants et aux apprenants. Je tiens en effet à souligner l'importance de l'attitude d'écoute et d'observation chez le formateur en face d'une personne en situation d'apprentissage.

Ce que je voudrais mettre en évidence dans cette thèse, ce sont donc, d'une part, des éléments pouvant aider des enseignants à mieux repérer et analyser certains comportements "erronés" de leurs élèves et, d'autre part, des éléments pouvant être pertinents quant à la conception ou à l'utilisation d'outils pédagogiques à supports technologiques.

Je présente dans ce chapitre les idées et principes, qui sont à la base de mes recherches, et les méthodes que j'ai utilisées.

Les chapitres II à V viennent étayer ces argumentations en s'appuyant, le cas échéant, sur des travaux déjà publiés.

Le chapitre VI donne, en guise de conclusions, les résultats qui me paraissent les plus significatifs et des pistes pour des recherches futures. Par ailleurs je passe en revue, en les commentant, quelques outils pédagogiques à support technologique.

I.1. IDEES ET PRINCIPES DE BASE

Remarques préliminaires et avis au lecteur :

Dans tout ce qui suit, j'utiliserai le mot *enseignant* pour parler aussi bien du maître dans sa classe que du concepteur de logiciels s'exprimant à travers une machine (en local comme en E.A.O., ou à distance avec la télématique).

C'est seulement lorsque je voudrai mettre en évidence des problèmes liés à l'absence de l'humain dans une relation enseignant / enseigné que je préciserai l'existence et les caractéristiques du support .

En procédant ainsi je veux attirer l'attention du lecteur sur le fait que de très nombreux problèmes liés aux erreurs peuvent être étudiés indépendamment d'une éventuelle utilisation de supports informatiques .

Cela permet de remettre à leur place les discussions sur la comparaison des qualités et des vertus de tel ou tel système-auteur ou langage de programmation, et d'investir plutôt sur des réflexions avant tout didactiques.

Je tiens, à partir de problèmes d'enseignement, à analyser les phénomènes sous-jacents à ceux-ci pour, éventuellement, aller chercher ou construire un outil technologique. La démarche inverse m'intéresse moins. Certains développements en Intelligence Artificielle et certains services télématiques me permettront d'illustrer cette position respectivement aux chapitres IV et V.

I.1.1. Distinction apprentissage / compréhension

Pour que l'enseignant puisse profiter des erreurs produites par un apprenant, il lui faut distinguer nettement les notions d'apprentissage et de compréhension chez cet apprenant.

En effet "avoir appris" peut être synonyme de "être capable de produire telle réponse à tel stimulus" sans qu'il y ait, en réalité, une quelconque maîtrise des concepts enseignés.

I.1.2. Les erreurs : d'où viennent-elles? quelle signification ont-elles?

Je cherche à comprendre les erreurs produites par des apprenants en mathématiques. En particulier je m'intéresse, dans mon travail de recherche, à la détermination de l'origine de ces erreurs, aux conditions de leur apparition, à leur fréquence et à leur signification.

Après avoir constaté l'existence d'une production erronée, je souhaite trouver les "raisonnements" qui ont pu conduire tel apprenant, dans telle situation, et en réponse à telle question, à fournir telle réponse.

Ceci afin d'obtenir des informations concernant l'état de la connaissance de cet individu sur le domaine considéré.

Je reste néanmoins conscient que toutes les productions incorrectes ne sont pas réductibles à des erreurs de raisonnement. Des facteurs extra-mathématiques, comme des problèmes de langage, des comportements liés au "jeu scolaire" (entre maîtres et élèves), voire la motivation de l'apprenant, peuvent aussi jouer un rôle non négligeable dans de telles productions et peuvent remettre en question certaines remédiations purement techniques (cf. par exemple, tests du type "Jojo, le cambrioleur" au chapitre II, certains exercices de l'E.S.I.E.E. au chapitre V et problèmes liés à la construction de tutoriels "intelligents" au chapitre IV).

I.1.3. Une remédiation efficace seulement si l'erreur est interprétée correctement

Pour que l'information apportée à un apprenant, ayant fourni une réponse erronée à une question, lui soit utile, c'est-à-dire pour que cette information ait des chances de lui permettre de rectifier une éventuelle incompréhension du domaine étudié, il est nécessaire (mais peut-être pas suffisant, pour l'enseignant, d'être capable de donner une signification à cette erreur. Il est donc souhaitable que, au moins au cours de sa formation, il soit mis en situation de réfléchir à de tels problèmes; ceci justifie à la fois des recherches didactiques sur les incompréhensions et les erreurs en mathématiques et des travaux pouvant conduire à des logiciels de type BUGGY ou FRACT (cf chapitre IV) fondés sur de telles recherches.

I.1.4. Dans quel but pose-t-on "cette" question ?

En 1831, Evariste GALOIS écrivait :

Pourquoi les examinateurs ne posent-ils les questions aux candidats que d'une manière entortillée ? Il semblerait qu'ils craignent d'être compris de ceux qu'ils interrogent; d'où vient cette habitude de compliquer les questions de difficultés artificielles ? Croit-on donc la science trop facile ?

<GAL31>

La question posée par un enseignant à un apprenant n'a pas pour but d'apporter une réponse à une interrogation personnelle de cet enseignant; nous pouvons, dans le cas général, lui faire crédit qu'il en connaît la réponse mathématiquement correcte. Cela fait, évidemment, partie du "jeu scolaire" (voir ci-après mes "propositions pour une pédagogie de l'erreur") que l'apprenant doit connaître.

On peut regretter que cette question soit parfois uniquement destinée à permettre à l'apprenant de convaincre son enseignant ou son examinateur, soit qu'il (l'apprenant) sait,

soit qu'il est capable d'imiter quelqu'un qui saurait; d'où l'importance de distinguer compréhension et apprentissage.

I.2. QUESTIONNEMENTS ET ERREURS

I.2.1. Définition d'un questionnement

Partant de la définition proposée par Jérôme CHASTENET de GERY (in <CHA88> p. 63) :

"j'appellerai *questionnement* une question et les modalités de réponse qui lui sont associées à l'avance",

j' y ajoute une dimension contextuelle au niveau pédagogique.

Ainsi, pour moi, un **questionnement** relève d'un enseignant-questionneur (éventuellement au travers d'un programme informatique) et comprend trois arguments :

- * le texte de la question tel qu'il est fourni au questionné,
- * les différentes réponses envisagées et les significations (diagnostics) y afférentes (selon l'auteur),
- * le contexte pédagogique dans lequel se situe le dialogue questionneur/questionné : les buts visés par le questionneur, le champ de savoirs et de savoir-faire considéré, la situation de contrôle ou d'examen.

Ce troisième argument joue un rôle fondamental pour la définition du niveau d'adéquation d'un questionnement à une évaluation, comme je l'indique dans le paragraphe suivant.

I.2.2. Niveau d'adéquation d'un questionnement à une évaluation

Définition: J'appelle "niveau d'adéquation d'un questionnement à une évaluation" la valeur de la question posée pour ce qui est de la fiabilité de la prévision, de la signification des erreurs produites par les questionnés et du diagnostic qui peut en être tiré sur leur compréhension du domaine considéré.

I.2.3. Profondeur et pertinence des erreurs

Définition: J'appelle "profondeur de l'erreur" un paramètre caractérisant l'erreur, inversement proportionnel à la compréhension qu'a son auteur du champ évalué.

Ainsi une erreur de niveau infini est une erreur traduisant chez le testé une totale absence de sens pour les objets et concepts de base qu'il est censé devoir manipuler. Par exemple, les élèves ayant trouvé -et accepté- que $5 \times (3/4)$ était égal à $3/4$ (en multipliant en haut et en bas

par 5 puis en ayant correctement simplifié le résultat) ont sans doute commis un erreur d'un niveau de profondeur voisin de l'infini en mettant en évidence que, pour eux, une fraction n'est pas un nombre. En revanche, une erreur de calcul relevée chez un candidat à l'agrégation pourra sans doute être considérée comme une erreur de niveau 0. Je classerai les erreurs dites d'inattention à ce même niveau 0.

Entre ces deux extrêmes j'appelle "erreurs de profondeur 1" celles qui traduisent, chez le testé, une incapacité à se donner des représentations correctes des phénomènes étudiés : images "mentales", exemples, contre-exemples,... C'est dans cette catégorie que l'on pourrait placer, par exemple, les erreurs, repérées dans mon enquête sur les limites (cf. chapitre V), consistant à croire que pour $x > 10^5$ on a $\sin x < \sqrt{2}/2$ (qui est interprétable comme : "la limite de la fonction sinus est nulle à l'infini") ou bien que pour $0 < x < 10^3$ on a $(1/x) < 10$ (resp. 20% et 25% des testés en terminale C). Il est clair que, prises isolément, de telles réponses ne peuvent être classées de manière automatique dans telle ou telle catégorie. Ainsi, l'erreur sur la limite de la fonction sinus pourrait être de niveau 0 si elle était le résultat d'une inattention d'un élève, connaissant parfaitement le comportement de cette fonction à l'infini, mais qui aurait "vu" $\sqrt{2}/2$ plus grand que 1. A l'inverse, un élève n'ayant rien compris aux fonctions trigonométriques pourrait fournir cette même réponse.

Définition: Je dis qu'une erreur est "pertinente", par rapport à un champ de connaissances, si elle fournit une information sur l'état de la connaissance de ce champ chez le testé.

Remarque : la pertinence n'a de sens que par rapport à un champ de savoir ou de savoir-faire donné. En croisant ces deux critères définis précédemment on peut observer différents types d'erreurs. Ainsi :

- des erreurs **profondes** (niveau voisin de l'infini) et **pertinentes** :

par exemple $5 \times (3/4) = 3/4$ pour ce qui est de la notion de fraction,

- des erreurs **profondes** mais **non pertinentes** : par exemple, dans l'exercice de l'E.S.I.E.E., présenté au chapitre V, l'erreur ayant consisté à dire qu'une fonction est continue sur \mathbb{R} mais pas sur $\mathbb{R} - \{1\}$ est profonde, dans le sens qu'elle reflète une méconnaissance des règles du langage mathématique, mais elle n'est pas pertinente par rapport à la notion de continuité; en revanche elle est profonde et pertinente par rapport au principe du maximum d'information,

- des erreurs de **surface**, c'est-à-dire peu profondes (niveau voisin de 0) **pertinentes** : avec des élèves de terminales scientifiques, la réponse "sinus" à la question "quelle est la dérivée de la fonction cosinus?" est pertinente, pour ce qui est du domaine des fonctions

trigonométriques, mais sans doute peu profonde, puisque ne remettant pas nécessairement en cause la connaissance du testé sur ce que sont les fonctions trigonométriques et leurs dérivées; évidemment, comme je l'ai déjà mentionné, d'autres questionnements seraient sans doute nécessaires pour pouvoir distinguer avec plus de certitude entre le niveau 0, le niveau 1, voire le niveau infini,

- des erreurs de **surface non pertinentes** : bien entendu, ce sont des erreurs généralement peu intéressantes du point de vue pédagogique; c'est le cas de toutes les erreurs de calcul par rapport à tous les domaines des mathématiques autres que le calcul élémentaire; elles peuvent être cependant fort gênantes lors d'un diagnostic d'erreurs (cf. enquêtes sur les fractions, chap. IV et V).

Cette classification suivant ces deux critères peut être utilisée pour juger de l'adéquation d'un questionnaire à un champ de connaissances. Il est clair en effet qu'un questionnaire est adéquat à un tel champ s'il satisfait les deux conditions suivantes :

- dans la liste des réponses attendues sont répertoriées les erreurs profondes et pertinentes les plus courantes,

- la rédaction de la question n'induit pas le testé à produire trop d'erreurs non pertinentes par rapport au champ considéré.

D'où la nécessité d'un double travail didactique préalable à toute construction d'un questionnaire à but évaluatif :

- la recherche et l'analyse des erreurs produites par les apprenants,

- l'étude de la formulation des questions.

Cette réflexion, bien qu'apparemment simple et n'ayant aucune prétention d'exhaustivité, me paraît pouvoir être utilisée dans le cas de logiciels éducatifs; les idées présentées ci-dessus sont en effet peu répandues aussi bien dans les didacticiels produits en E.A.O. usuel que dans les didacticiels du type tutoriels "intelligents" (cf. chap. IV et V).

Dans l'optique de la construction d'outils destinés à l'auto-évaluation et à l'auto-formation, il est préférable de concevoir un questionnaire complet, c'est-à-dire un ensemble cohérent de tels questionnements, afin de pallier les risques de mauvaise interprétation d'un comportement erroné, pour ne pas "dramatiser" ce qui ne serait qu'une simple erreur d'inattention ou pour ne pas valoriser une "bonne réponse" résultant d'un raisonnement incorrect, critique faite classiquement aux Q.C.M. (cf. <ADD88>).

I.3. ESSAI D'UNE TYPOLOGIE DES QUESTIONNEMENTS. CAS PARTICULIER DES Q.C.M.

Le sigle Q.C.M. est généralement utilisé, en France, pour "Questionnaire à Choix Multiple". Dieudonné LECLERCQ (in <LEC86> pp. 14 et ss.) préfère "question à choix multiple" qui lui semble correspondre à l'usage anglais et néerlandais et qui n'implique pas l'existence d'une forme unique des questions à l'intérieur d'un ensemble de questions. Je me permettrai donc, et suivant la terminologie présentée plus haut, d'utiliser désormais ce sigle pour "questionnement à choix multiple".

Ce terme générique recouvre en fait des questionnements fort divers, présentant des stratégies de réponse elles-mêmes fort variées. Avant d'en donner une définition et d'en dresser une typologie, je souhaite partir d'une notion plus générale.

I.3.1. Questionnement fermé / questionnement ouvert

Définition: un questionnement est dit **fermé** si les différentes réponses envisagées pourraient permettre une analyse mécanique (par exemple informatique) de la réponse du testé.

On peut ainsi distinguer les questionnements **fermés explicites**, ceux pour lesquels le texte de la question présente explicitement au testé la liste des réponses envisagées, et les questionnements **fermés implicites** pour lesquels cette information n'est pas accessible au testé; ce dernier cas correspond à ceux des exercices généralement donnés en E.A.O. (cf. chap. III), en mathématiques ou ailleurs, dans lesquels les auteurs utilisent, par exemple, un ensemble de mots-clefs que le programme compare à la réponse fournie par l'élève. On peut ranger aussi dans cette catégorie ce que certains auteurs (enseignants de médecine en particulier) appellent des Q.R.O.C. (questions à réponse ouverte courte) où, le plus souvent, l'élève doit remplir une case avec une expression littérale brève, ou bien un nombre ou une expression algébrique. Je classerai ainsi dans cette catégorie les tests sur les fractions (cf. chapitre IV) où les élèves étaient invités à donner leur réponse sous la forme d'un entier ou d'une écriture fractionnaire ou bien de cocher, le cas échéant, la case "IMPOSSIBLE". Dans tous ces cas, l'élève sait qu'il doit répondre de façon très brève. En revanche, dans des questionnements fermés plus sophistiqués au niveau de l'analyse informatisée de la réponse de l'élève, ce dernier a la possibilité de s'exprimer plus longuement. Le programme fait alors appel à des combinaisons booléennes de mots-clefs pour "interpréter" cette réponse. Certains systèmes-auteurs, comme EGO™ (développé en France par Maurice PEUCHOT), fournissent, aux concepteurs de didacticiels, des outils pour faciliter ce type d'analyse de chaînes de caractères. Certains travaux menés en Intelligence Artificielle, dans le domaine de la compréhension des langues naturelles, relèvent d'une problématique analogue.

De manière évidente, je dirai qu'un questionnaire est **ouvert** s'il n'est pas fermé, au sens ci-dessus. Les dissertations philosophiques ou historiques, les problèmes de mathématiques du type "démontrez que...", entrent dans cette catégorie.

Remarque : Je n'utilise l'adjectif "ouvert" que pour des questionnements, au sens vu ci-dessus, pas pour des questions.

On peut imaginer aisément construire un questionnaire **fermé** à partir de certaines questions comme :

"Quelle est, en degrés, la somme des angles d'un triangle ?".

Mais pas pour toutes; ainsi, sans doute pas pour :

"Quelles sont les causes de la Révolution française (dix pages maximum)?".

I.3.2. Questionnements à choix multiples

L'une de mes préoccupations fondamentales étant l'étude des possibilités d'un support technologique, je me limiterai volontairement aux questionnements fermés puisque, suivant ma définition, ils devraient pouvoir conduire à une analyse informatique de la réponse du testé. Parmi ces questionnements, les explicites me paraissent mériter une attention particulière et même un essai de typologie (le lecteur pourra trouver un essai de ce type dans <LEC86> et des éléments de réflexion complémentaires dans <BOX88> et <CHA88>).

Par définition, j'appelle **questionnement à choix multiple**, en abrégé Q.C.M., tout questionnement fermé explicite.

La question associée à un Q.C.M. comprend un texte introductif suivi de p propositions. Pour chacune de celles-ci le testé peut exprimer son avis en cochant une case, en écrivant un nombre ou une lettre dans une case, ou bien, éventuellement en s'abstenant de répondre. Les contraintes de réponse sont généralement fournies au candidat au début du questionnaire si tous les Q.C.M. suivent le même schéma de réponse, sinon ces contraintes sont indiquées dans le texte de chacune des questions. Pour simplifier je considérerai désormais qu'il existe, pour chacune des p propositions, une case (virtuelle) dans laquelle le testé peut exprimer son choix; l'important étant le nombre et le type de choix disponibles pour remplir cette case. C'est à partir de cette information que je propose d'établir une typologie des Q.C.M.. J'indiquerai, le cas échéant, les diverses contraintes existantes et leur incidence sur les comportements de réponse.

Au préalable, je signale que je prendrai en compte, dans cette typologie, la possibilité qu'a ou n'a pas le testé d'exprimer son ignorance; je noterai le premier cas avec un "(+1)" et le second cas avec un "(+0)" à la suite du nombre de choix possibles.

I.3.3. Les Q.C.M. simples

Définition: J'appelle Q.C.M. simple tout Q.C.M. ayant 2(+0) choix de réponse. La question comporte un texte introductif et p réponses possibles parmi lesquelles le testé doit en choisir n, les n "bonnes" (resp. les n "mauvaises" s'il s'agit, par exemple de choisir les intrus) en cochant les cases correspondant à ses choix ou en indiquant le(s) numéro(s) des réponses choisies. Le nombre n est indiqué clairement au testé; il est presque toujours égal à 1 mais n'est évidemment jamais égal à 0 ou à p. On pourra employer une expression du type "Q.C.M. simple d'ordre n,p" pour les Q.C.M. comportant p propositions parmi lesquelles n doivent être choisies.

Le fait de cocher une case est équivalent à un "VRAI" (resp. un "FAUX") et les cases non cochées devraient donc exprimer un "FAUX" (resp. un "VRAI"). L'ignorance n'est donc pas exprimable avec ce type de Q.C.M. d'où les 2(+0) choix de réponse. En effet, et c'est un défaut majeur, les Q.C.M. simples ne permettent pas d'interpréter les non réponses. Or celles-ci peuvent avoir plusieurs sens. Au moins les suivants :

(1) le testé ne sait pas répondre,

(1') *cas particulier* : le testé ne sait pas répondre à la question mais possède une connaissance qui lui permettrait de répondre partiellement à la question (par exemple en étant capable d'éliminer certaines propositions)

(2) le testé considère que la question est mal formulée, ou qu'il manque des informations pour répondre ou bien encore que la question est hors programme,

(3) le testé croit pouvoir répondre mais son raisonnement le conduit à une solution qui ne se trouve pas dans la liste proposée.

Dans les cas (1) et (1'), le testé avoue son ignorance (totale ou partielle) et, en ne répondant pas, reconnaît que c'est de sa faute; dans les deux autres cas, en revanche, il émet un jugement sur le test et déclare que c'est de la faute de l'auteur s'il ne peut pas cocher de case(s).

L'éventualité (3) est parfois supprimée par l'adjonction d'une proposition "Autre" à la suite de la suite des réponses explicites fournies.

Définition: J'appelle Q.C.M. élémentaire tout Q.C.M. simple d'ordre 1,p.

Ce sont les plus répandus. Ainsi un ouvrage de recyclage à distance des professeurs de mathématiques argentins, par ailleurs fort bien fait, sur une méthodologie de l'enseignement de cette discipline, donne sept conseils pour construire correctement des Q.C.M., le dernier étant :

Evitar que entre las opciones haya más de una correcta

Ce type de Q.C.M. accentue le risque de réponse correcte à partir d'un raisonnement incorrect ou d'une absence de raisonnement. Bien qu'il soit difficile de prétendre que des testés répondent au hasard (je n'ai jamais vu de candidats tirer un numéro d'un chapeau ou pointer avec leur crayon leur feuille de test en fermant les yeux), on peut aisément admettre l'existence de "raisons" fondées simplement sur la forme de la question, sur des analogies ou, tout simplement, sur un coup d'œil sur la copie du voisin.

La plupart des auteurs travaillant avec des Q.C.M. estiment que la "chance" de fournir la bonne réponse "par hasard" diminue avec le nombre de réponses possibles. Avec un Q.C.M. simple d'ordre n, p , en admettant de la part des testés des réponses incomplètes (moins de n cases cochées) et la non-réponse, on obtient $N(n, p)$ réponses possibles, avec $N(n, p) = \sum_{i=0}^n p^i / [(p-i)! i!]$, où i varie entre 0 et n . Dans le cas le plus ordinaire, $n=1$, $N(1, p) = p+1$.

En restant dans le cadre des Q.C.M. simples, et avec ce qu'il appelle des "Q.C.M. à solutions générales", Dieudonné LECLERCQ propose des tests dans lesquels le candidat se verrait offrir, de manière explicite, des réponses du type "il existe une solution mais aucune des solutions proposées dans l'énoncé ne convient", "les informations contenues dans l'énoncé ne permettent pas de conclure et de faire un choix parmi les solutions proposées", "l'énoncé contient des absurdités". L'auteur met lui-même en lumière toutes les difficultés de compréhension des consignes de passation pour de tels tests. De plus, ces choix portent sur l'ensemble des p propositions et non sur chacune d'entre elles; ce qui limite encore l'intérêt d'une telle procédure. Dieudonné LECLERCQ mentionne qu'elle a déjà été mise en œuvre dans l'enseignement supérieur mais pas ailleurs (in <LEC86>).

I.3.4. Les Q.C.M. complexes

Définition : J'appelle **Q.C.M. complexe** tout Q.C.M. qui n'est pas simple.

Ce sont, par exemple, des Q.C.M. du type de ceux présentés au chapitre II, pour les tests sur l'implication, ou de ceux présentés au chapitre V pour les concours de l'E.S.I.E.E. et pour l'enquête sur les limites.

Certains Q.C.M. complexes méritent une attention particulière.

I.3.4.1. Les Q.C.M. de véracité stricte

Ce sont les Q.C.M. ayant $2(+1)$ choix de réponse. Ils peuvent tous se réduire à la forme suivante : la question contient un certain nombre p de propositions et pour chacune d'entre elles, le testé doit estimer si cette proposition est vraie ou fausse, soit en cochant des cases soit en inscrivant un V (ou un O, pour OUI) ou un F (ou un N, pour NON) suivant le cas. Il est sous-entendu qu'aucune des propositions ne contient de quantification implicite et que la

connaissance supposée des candidats devrait leur permettre d'émettre un jugement en VRAI/FAUX pour chacune d'entre elles. Les candidats peuvent s'abstenir, mais alors il ne peut s'agir que des cas (1) ou (2).

Par exemple, avec les Q.C.M. des concours de l'E.S.I.E.E. ou ceux de l'enquête sur les limites (chapitre V), le candidat a la possibilité de ne rien écrire; il sait, dans le cas de l'E.S.I.E.E. qu'il sera pénalisé, mais moins que s'il avait commis une erreur. Le protocole indique aussi que le nombre de V peut varier, d'un exercice à l'autre, entre 0 et p (bornes comprises). Ce nombre n'est jamais indiqué au candidat. Le choix de réponses possibles est donc très élevé; le blanc étant pris en compte on arrive ainsi à 3 P. Dans le cas des concours de l'E.S.I.E.E., où $p = 5$, on trouve 243 possibilités de réponses mais seulement 32 peuvent être, a priori, entièrement correctes puisque, dans la version actuelle des concours, il n'est pas envisagé qu'une bonne réponse contienne de blancs; la bonne réponse est donc une certaine suite de cinq lettres formée de V et/ou de F. Sous cette forme, il est sous-entendu, pour le candidat, que l'auteur du test considère que la question a un sens et que l'information fournie est suffisante pour pouvoir conclure quant à la véracité des propositions à étudier. Le fait de ne pas répondre à un item pourra donc être interprété, de la part du testé, comme un aveu d'ignorance ou de refus de traiter la question par exemple pour une question de temps.

Avec des tests de véracité stricte nous pensons avoir plus d'informations sur les raisons ayant conduit le candidat vers une réponse correcte en particulier grâce à des recoupements entre différentes réponses (cf. chap. V sur la construction de tels tests). Ceci nous semble aussi pouvoir diminuer le risque de ne pas pouvoir distinguer le candidat ayant fourni une bonne réponse pour de bonnes raisons du candidat ayant donné la même réponse mais à partir d'un raisonnement erroné (cf. <ADD88>).

Un autre avantage, en particulier dans le cadre d'un concours, est de pouvoir donner des points à des candidats qui, pour des raisons de temps en particulier, ne peuvent trouver éventuellement certaines réponses correctes mais sont capables d'éliminer certaines propositions; ainsi, par exemple, dans le cas des développements limités donnés dans l'exercice n°10 en 1986 (cf. fig.I.1), sans connaître le développement de $f(x)$ on pouvait aisément éliminer les propositions B et D qui font apparaître des exposants pairs et la proposition E qui possédait un terme constant; 5% des candidats ont d'ailleurs fourni cette réponse incomplète.

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = e^{x^2} \sin x$

L'expression suivante est un développement limité de f au voisinage de zéro

(A) $x + \frac{5x^3}{6} + x^4 \in (x)$

(B) $1 + x^2 + \frac{x^4}{24} + x^4 \in (x)$

(C) $x - \frac{5x^3}{6} + x^4 \in (x)$

(D) $x^2 + \frac{x^4}{24} + x^4 \in (x)$

(E) $1 + x + \frac{5x^3}{6} + x^4 \in (x)$

(A)	V	F		
(B)	F	F	F	
(C)	F	V		
(D)	F	F	F	
(E)	F	F	F	
	38 %	10 %	5 %	28 %

avec dans tous les cas $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \text{expression}}{x^4} \in (x) = 0$

fig.I.1: exercice n°10, concours E.S.I.E.E.1986

I.3.4.2. Les Q.C.M. de véracité large

Comme pour certains des tests des enquêtes sur l'implication (cf. chapitre II), il existe des cas où il est nécessaire d'utiliser des formulations comportant un troisième choix de réponse en plus des cases V (ou O) et F (ou N) : "on ne peut pas savoir", en abrégé ONPPS. Il s'agit de questions faisant intervenir des propositions implicitement quantifiées. Ainsi dans un test sur le droit de vote (analysé au chapitre II), sous l'hypothèse que tous les Français nés en 1950 peuvent voter en 1978 et sachant que Jacques peut voter en 1978, on ne peut répondre ni oui ni non à la question "Jacques a-t-il 1950 pour année de naissance ?". Il ne s'agit pas d'un aveu d'ignorance personnelle mais bien d'une affirmation faisant suite à un raisonnement. En l'occurrence, la quantification "fictive" introduite par "Jacques" conduit à interpréter les différentes réponses comme suit : "OUI" signifie "oui, tous les individus pouvant voter en 1978 ont 1950 pour année de naissance", "NON" correspond à "non, aucun des individus pouvant voter en 1978 n'a 1950 pour année de naissance" et "ON NE PEUT PAS SAVOIR" veut alors dire : "parmi les individus pouvant voter en 1978, il en existe qui ont 1950 pour année de naissance et il en existe qui n'ont pas 1950 pour année de naissance". On peut aisément rencontrer une semblable nécessité dans le cas d'exercices plus scolaires; par exemple, sous l'hypothèse "X est un entier multiple de 2 et de 3, mais pas de 5", à la

question "X est-il multiple de 8 ?" on ne peut répondre ni oui ni non, un troisième choix est donc nécessaire.

Pour ce troisième choix nous avons, pour certains tests, utilisé diverses formulations : "ON NE PEUT PAS SAVOIR", "JE NE PEUX PAS SAVOIR", "JE NE SAIS PAS" afin d'en étudier l'influence sur le comportement de réponse des testés. Comme le lecteur pourra le constater, au chapitre II, les résultats mettent en évidence l'importance, non évidente a priori, de ce paramètre : à formulation identique de la question, la personnalisation liée au "JE" entraîne un rejet des choix de réponse comportant ce pronom.

Nous n'avons pas encore utilisé la quatrième forme possible : "ON NE SAIT PAS", qui pourrait correspondre soit à la réponse "A l'heure actuelle aucun mathématicien ne sait dire si cette proposition est vraie ou fausse", soit à la réponse "Au niveau de cette épreuve, aucun candidat, n'utilisant que les connaissances du programme, peut dire si cette proposition est vraie ou fausse". Il serait nécessaire de recourir à une telle formulation par exemple pour une proposition du type : "la $(10^{10})^{10}$ ème décimale de π est 3".

Les Q.C.M. de véracité large sont à 3(+1) choix de réponse; mais, contrairement à ceux de véracité stricte qui rassemblent tous les Q.C.M. à 2(+1) choix, leur ensemble est strictement inclus dans celui des Q.C.M. à 3(+1) choix.

I.3.4.3. Différents types de Q.C.M. de véracité

-> type 1: $X \rightarrow \{P_i(X) / 1 \leq i \leq p\}$

L'énoncé de départ définit un objet X et est suivi de p propositions portant sur des propriétés de X. Un tel exercice permet -théoriquement- de poser des questions ayant un lien logique entre elles et donc de tester la cohérence de la réponse globale et de la connaissance du candidats sur l'objet X. A priori, le candidat ne peut deviner le nombre de V et de F (et d'éventuels troisièmes choix) composant la "bonne réponse".

X peut être soit un objet très précis, par exemple une fonction (cf. exercice D.10, fig. I.2) ou, au contraire, un champ assez large comme la convergence des suites trigonométriques (cf. exercice n°8 concours E.S.I.E.E. 84, fig. I.3). On peut cependant estimer qu'à un certain degré de généralité du champ on se trouverait plutôt dans le cas de p exercices réunis sous un même numéro; on pourrait alors considérer qu'il s'agit de p Q.C.M. complexes ne comportant qu'une seule proposition chacun. Le critère permettant de définir le type d'un exercice portant sur un champ très général est l'existence d'informations pouvant ou non être obtenues par comparaison entre les réponses aux diverses propositions. Ainsi dans l'exercice de la figure I.3, bien que le thème soit très général, on peut voir, par exemple, un intérêt à comparer les réponses aux items (A) et (C) d'une part, et aux items (B) et (D) d'autre part; cet exercice peut donc être considéré comme appartenant au type 1 et non comme la réunion de 5 exercices à une seule proposition.

On pose, pour tout x réel, $f(x) = \frac{x^3 - 20x^2 - 1}{x^2 + x - 11}$

Répondez par V (vrai) ou F (faux) pour chacune des propositions suivantes :

Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-1}$, on a $f(x) < 10^{-1}$

Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-2}$, on a $f(x) < 10^{-1}$

Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-2}$, on a $f(x) < 10^{-2}$

Il existe n dans \mathbb{N} tel que,

pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-n}$, on a $f(x) < 10^{-2}$

(si vous répondez V, donnez un tel n :)

fig. I.2 : Exercice D.10 . Enquête sur les limites

Chacune des suites ci-dessous est convergente pour toute valeur du paramètre réel x :

(A) $(\cos(\frac{\pi x}{3n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$

(B) $(\cos(\frac{nx}{3\pi}))_{n \in \mathbb{N}^*}$

(C) $(\cos(\frac{\pi x}{3}))_{n \in \mathbb{N}^*}$

(D) $(\frac{1}{n} \cos(\frac{nx}{3\pi}))_{n \in \mathbb{N}^*}$

(E) $((-1)^{\cos(\frac{n\pi}{2})})_{n \in \mathbb{N}^*}$

fig. I.3 : Exercice n°8. Concours E.S.I.E.E. 84

Remarque : La question de l'exercice 8 ci-dessus est mal formulée; telle quelle, elle concerne l'ensemble des cinq suites et ne devrait donc conduire qu'à une seule réponse : V si les cinq suites sont convergentes, F sinon. L'existence de cinq cases a dû suffire aux

candidats pour "deviner" la question posée, à savoir : "Indiquez, pour chacune des suites ci-dessous, si elle est convergente pour toute valeur du paramètre x ".

-> type 2 : $X \rightarrow \{P_i = X? / 1 \leq i \leq p\}$

Dans ce type d'exercice l'énoncé introduit une expression X et le candidat doit indiquer, parmi les p choix proposés ensuite, ceux qui sont égaux à X .

Ce type est très voisin du Q.C.M. simple. Une différence réside dans le fait qu'il peut se faire que plusieurs réponses conviennent ou qu'aucune ne convienne et que le candidat n'est pas averti de la situation dans laquelle il se trouve. Une autre différence provient du nombre de choix de réponse, ici $2(+1)$ choix possibles.

Nous n'avons pas utilisé ce genre d'exercice lors de l'enquête sur les limites; quant au concours de l'E.S.I.E.E., nous souhaiterions limiter ce type d'exercice car il permet difficilement de mettre en évidence des incompréhensions et présente des difficultés d'interprétation des réponses. D'une part, on peut estimer, dans le cas où plusieurs réponses conviennent, que des candidats ayant trouvé l'une de ces réponses s'arrêtent là dans leur recherche et remplissent automatiquement les quatre autres cases avec des F pour gagner du temps; comment dans ce cas interpréter la ou les mauvaises réponses qui en découlent? Comment distinguer l'élève ayant fait ce choix pour aller vite et l'élève ayant fait une erreur de calcul ou de raisonnement pour arriver à cette même conclusion? D'autre part, comme Jacques WEBER, responsable des concours, le fait remarquer avec juste raison, certains candidats inscrivent deux V pour des réponses P_i et P_j où, de manière évidente, $P_i \neq P_j$; il y voit non pas une faute de logique mais plutôt une "stratégie gagnante": l'une des deux réponses étant correcte, mais ne sachant pas précisément laquelle, le candidat estime que les points positifs de la bonne seront supérieurs, en valeur absolue, aux points négatifs de la mauvaise. Ce qui pose un nouveau problème pour l'établissement du barème. (Je présente, au chapitre V différentes stratégies de réponse et différentes "logiques" utilisées par les candidats des concours de l'E.S.I.E.E.).

I.3.4.4. Des Q.C.M. complexes qui ne sont pas de véracité

Certains Q.C.M. complexes ne peuvent pas être considérés comme des Q.C.M. de véracité; par exemple ceux que Dieudonné LECLERCQ appelle les Q.C.M. d'appariement. Il s'agit de Q.C.M. dont le texte de la question fournit une liste de r objets repérés par un nombre ou une lettre; le testé doit indiquer, pour chaque proposition, le nombre ou la lettre de l'objet associé.

Il s'agit donc de Q.C.M. à $r(+1)$ choix de réponse. Les contraintes varient suivant, par exemple, que r et p sont ou non égaux, ou que certains objets peuvent ou non être cités plusieurs fois.

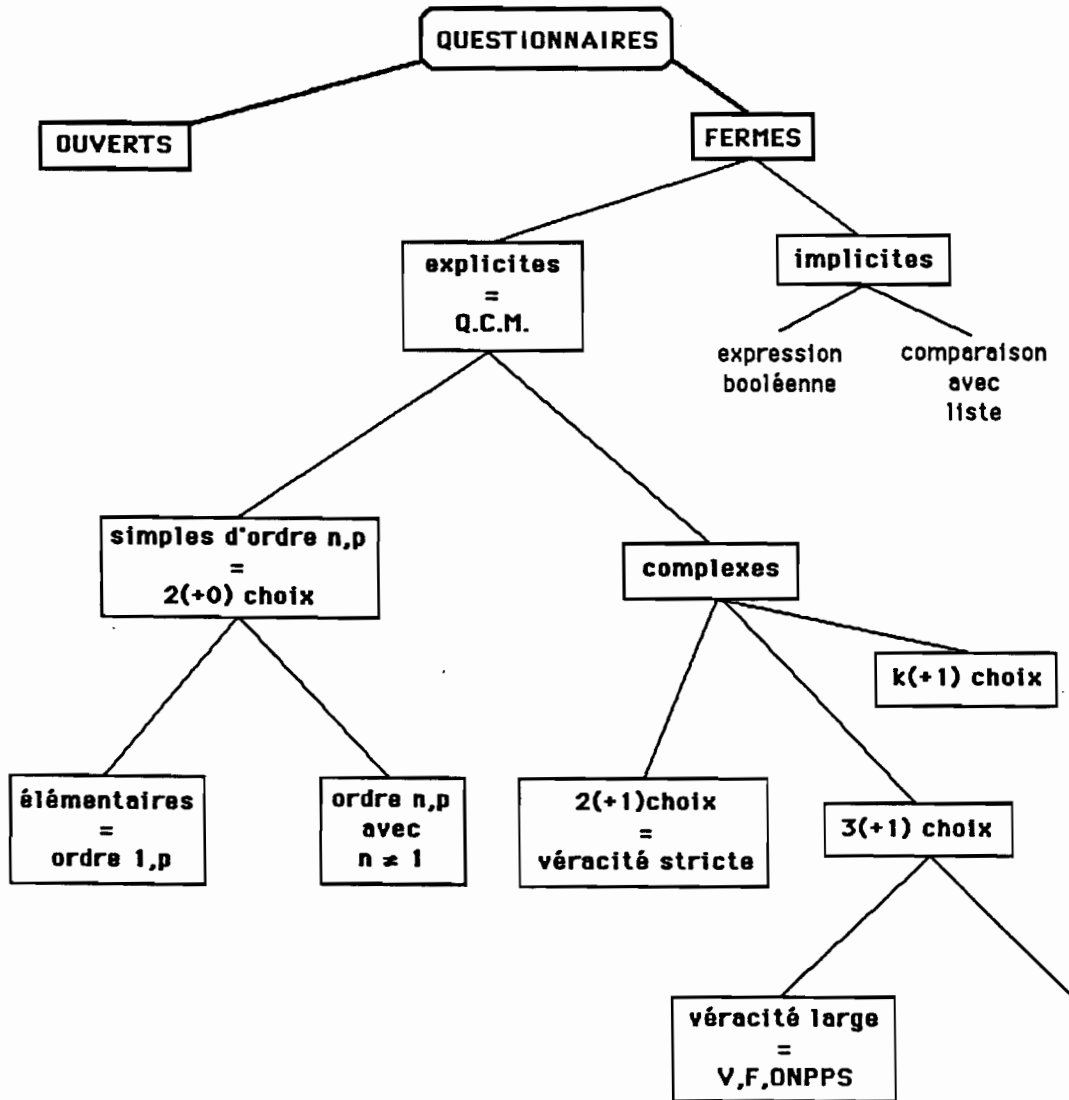


fig. I.4 : Schéma récapitulatif des principaux types de questionnements

I.4. POUR UNE PEDAGOGIE DE L'ERREUR

Dans la vision classique de l'enseignement le maître est chargé, par la communauté éducative, de transmettre la "bonne parole", faire entrer dans la tête des élèves les savoirs, c'est-à-dire ce qui est "vrai", démontré, reconnu. C'est aussi lui qui reçoit la mission de dire si tel élève a appris (ou, plus difficile, compris) telle notion, s'il peut passer dans la classe supérieure. Pour l'élève la confusion survient souvent entre la "vérité" scientifique et la vérité du maître, "si le maître le dit, c'est vrai". Pire encore est la liaison de type affectif entre l'enseignant d'une discipline et cette discipline elle-même. Nous avons tous dans notre entourage quelqu'un qui déteste les mathématiques parce qu'il a souffert d'un collègue sadique ou, plus rarement il est vrai, quelqu'un qui les adore parce que la "prof" était "géniale" (ou sexy ?). L'erreur reçoit donc, dans la situation scolaire ordinaire, un statut dévalorisant et culpabilisant pour celui ou celle qui la produit. Et pas seulement au niveau des élèves; ainsi je fus confronté plusieurs fois, en formation des maîtres, à de futurs collègues qui déclaraient se refuser à reconnaître leurs erreurs devant leurs élèves ou qui ne voyaient pas la nécessité d'une réflexion avant de répondre. Il est d'ailleurs intéressant, surtout en France, de regarder comment l'enseignement des mathématiques s'efforce de présenter les contenus de manière parfaitement ordonnée, voire linéaire, sans laisser de place à la présentation des essais, souvent infructueux, parfois erronés, de brillants mathématiciens, essais qui conduisirent à l'état actuel des connaissances (par exemple la topologie de \mathbb{R} , cf. chap. V). Je tiens cependant à mentionner le grand nombre de travaux réalisés dans plusieurs I.R.E.M., notamment celui de Paris 7, dans ce domaine.

Il n'est donc pas inutile d'insister sur l'intérêt pédagogique des erreurs, tant en formation en face à face que pour l'enseignement à distance.

Dans le premier cas, le rapport de l'équipe de recherche Articulation école-collège de l'I.N.R.P. (in <ERR87>) prouve bien que le comportement des maîtres le plus répandu devant une production d'erreurs en classe de mathématiques, est la rectification du discours afin que le maître énonce (ou fasse énoncer) la "bonne" réponse :

" - corriger une erreur c'est bien plus rechercher la bonne réponse qu'analyser, décortiquer cette erreur ou produire des arguments.

- les élèves sont sollicités presque exclusivement pour donner la bonne réponse.

- l'enseignant intervient soit pour émailler la correction de commentaires ne comportant pas d'éléments d'information, soit pour aider les élèves en rappelant une règle, un énoncé ou en donnant une explication. On peut d'ailleurs noter que cette explication vient souvent à la suite de la bonne réponse donnée par un élève ou par lui-même."

Les auteurs fondent leurs conclusions sur des observations de classes de CM2 et de 6ème (en mathématiques) à partir desquelles il a obtenu les statistiques suivantes :

" - plus de 50% des "interventions" sont consacrées à tenter de donner la bonne réponse (ou à la donner) alors que 20% seulement des interventions (à peine 18% en 6e) sont consacrées à chercher un élément de référence (environ 17%) ou une explication (à peine 3% au CM2, environ 1% en 6e).

- les élèves sont d'abord sollicités pour donner la bonne réponse (43% du total des interventions sollicitées des élèves, au CM2 comme en 6e) et l'enseignant intervient plutôt pour commenter, apporter un élément de référence ou une explication (environ 35% du total des interventions)." <ERR87> p.187

Les observations faites au niveau du CM2 et de la 6ème, par mes collègues de DP1 ne peuvent sans doute pas être simplement extrapolées au niveau des autres classes du collège, ou de celles du lycée; je pense néanmoins, sans pouvoir m'appuyer sur des résultats scientifiquement établis, que la situation y est semblable et, de toute façon, mériterait sans aucun doute de faire l'objet d'une recherche.

De l'étude ci-dessus citée, il ressort qu'il y a donc peu ou pas de récupération de l'erreur produite par l'élève. Celui-ci est donc renvoyé à la réponse de référence; il n'a appris qu'une chose : il avait "faux". Or, dans l'optique de ce que j'appelle une **pédagogie de l'erreur**, celle-ci peut être une source d'information pour le maître.

Cette pédagogie repose sur l'idée simple suivante : on ne possède pas bien un domaine de connaissances uniquement en étant capable d'énoncer des règles justes mais surtout en ayant acquis les savoir-faire permettant d'utiliser ces connaissances et en ayant compris tout ce que l'on ne peut pas appliquer, par exemple, les raisons pour lesquelles telle propriété ne peut être étendue à telle situation.

Je pense très fortement que cette conception, très claire pour les mathématiciens, convient tout aussi bien à l'enseignement des mathématiques.

En dehors des erreurs de niveau 0 (fautes d'inattention ou de calcul) peu intéressantes (sauf dans le cas d'un élève produisant une grande quantité d'erreurs de ce type), celles dues à des méconnaissances du domaine d'étude, à des règles erronées ou à des enchaînements logiques incorrects sont des indices qui, repérés par le maître, peuvent lui permettre de mieux cerner la difficulté devant laquelle est placé l'élève qui a manifesté un tel comportement . Il est alors possible de fournir de manière personnalisée une aide à cet élève. Cela sous-entend bien évidemment que le but recherché par le maître n'est pas que ses élèves soient capables de reproduire son discours mais qu'ils aient acquis des connaissances transférables (et en particulier des méthodes d'acquisition de connaissances).

I.4.1. Comment favoriser une telle pédagogie ?

Du point de vue de la formation des maîtres, en tout premier lieu, il serait nécessaire de les confronter aux erreurs : qu'ils soient capables de les reconnaître et, surtout, de les comprendre pour s'en servir en vue d'activités de remédiation. Le logiciel BUGGY peut favoriser cette approche, et il pourrait aisément en être de même de FRACT-1 (cf. chap. IV). Dans ce type d'activité l'élève-maître pose des questions à la machine; celle-ci, se comportant en mauvais élève (mais de manière systématique, ce qui ne semble pas être le cas de la majorité des élèves), c'est-à-dire en combinant des règles vraies et des règles fausses, répond de manière incorrecte; l'élève-maître, seul ou après discussion avec ses pairs, doit reconstruire des cheminements erronés possibles ayant conduit de l'énoncé au résultat faux.

Cela suppose des connaissances didactiques précises sur ces phénomènes d'erreur, sur les conditions d'apparition, les facteurs favorisant tel ou tel comportement, les enchaînements d'erreurs,.... Les deux enquêtes sur le calcul des fractions répondent à cette attente (chap. III et IV).

I.4.2. Des outils pour l'enseignement

Une pédagogie de l'erreur conduit aussi à utiliser des exercices très particuliers, des exercices **incitatifs à l'erreur**.

Je ne développerai pas ici les arguments polémiques relatifs aux risques que l'on prend(ra)it à présenter à des élèves des résultats faux (sans parler des méthodes fausses !); Dieudonné LECLERCQ donne une synthèse de divers travaux, de PRESTON et de KARRAKER en particulier, sur ce thème dans <LEC86>, page 35 et suivantes. Il reste que pour savoir si un élève a une maîtrise suffisante d'un certain domaine et est capable de ne pas produire certaines erreurs, le meilleur moyen est de le mettre en situation de les produire et de voir s'il résiste aux tentations. Il faut donc le confronter à des exercices -non pas "aléatoires" comme au bon vieux temps des publicités d'E.A.O.- mais qui font intervenir des facteurs incitatifs à l'erreur.

Depuis que j'ai failli perdre la vie à cause d'un chauffeur de taxi ayant traversé le terre-plein central d'une voie rapide, je me permets de donner cette comparaison:

lorsqu'un moniteur d'auto-école veut vérifier que son élève a bien compris l'interdiction du demi-tour sur voie rapide, il a le choix entre deux expériences : la première consiste à le faire circuler sur une autoroute munie d'un séparateur de voies en béton d'un mètre de haut, mais il y a peu de chance qu'il puisse répondre avec certitude à sa question, la seconde consiste (un jour de faible circulation !) à le faire conduire sur une autoroute avec terre-plein central en pelouse et, juste au moment de dépasser une sortie lui faire remarquer avec étonnement et brusquement que c'était là la bonne sortie...

Il n'y a pas lieu ici de m'accuser de sadisme ou de perversité si l'on ne perd pas de vue l'objectif de base : il s'agit d'aider à mieux comprendre ce que l'enfant a mal compris pour l'aider plus efficacement, et non pas d'évaluer ses connaissances avec de tels exercices (sur ce thème voir <BOX88>).

Il ne faut cependant pas confondre cette pédagogie "réfléchie" avec des comportements tels que l'enseignement lui-même apparaîtrait comme générateur d'erreurs. Ainsi, suivant un exemple proposé par Roger CUPPENS, ne donner, au début de l'apprentissage du calcul des fractions, que des expressions simplifiables pendant une longue période, pourrait conduire certains enfants à croire que toutes les fractions sont simplifiables et donc, placés ultérieurement devant une expression irréductible, de tels enfants pourraient "inventer" des règles incorrectes pour arriver à "simplifier".

Dans la perspective de l'enseignement à distance ou de l'apprentissage individualisé, une "pédagogie de l'erreur" peut être mise en pratique et donner lieu en particulier à des tests d'auto-évaluation utiles et efficaces.

Dans le cas d'un apprentissage sans face-à-face, le temps s'écoulant entre la production d'une erreur et la correction peut être très long (plusieurs semaines pour la plupart des cours par correspondance), l'erreur, si elle est profonde, est donc déjà bien ancrée dans la mémoire de l'apprenant lorsque l'éventuel remède est apporté, ce qui diminue ipso facto son effet. On peut donc, pour être doublement efficace, proposer des exercices auto-évaluatifs/ auto-correctifs ayant pour buts :

- a) d'être incitatifs aux erreurs
- b) de repérer les erreurs "intéressantes"
- c) d'offrir des moyens de faire comprendre à l'apprenant les causes de ses erreurs et d'augmenter sa connaissance du domaine étudié.

Des Q.C.M. "bien construits" peuvent, nous semble-t-il, jouer ce rôle. En effet, comme je l'ai déjà signalé précédemment, l'un des avantages du Q.C.M. est que l'on n'a pas besoin d'avoir un interpréteur de textes "ouverts", remplaçant l'enseignant et capable à sa place de comprendre la réponse de l'apprenant, pour pouvoir en tirer profit.

Les problèmes réels auxquels les concepteurs de Q.C.M. sont confrontés sont, d'une part, de recenser les principales erreurs possibles et, d'autre part, pour chacune d'elles de construire une argumentation et/ou des activités pouvant permettre à l'apprenant de comprendre son erreur et de vérifier qu'il l'a dépassée.

Comme je le montre au chapitre V, ces préoccupations ne semblent pas être celles des constructeurs des exercices disponibles actuellement via le Minitel. Seule "la bonne réponse" intéresse les concepteurs et l'apprenant ne profite en rien de ses erreurs qu'il risque d'ailleurs de conserver sans même avoir l'occasion d'y réfléchir.

I.5. ASPECTS METHODOLOGIQUES LIES A L'UTILISATION DE VASTES POPULATIONS

A l'occasion des principaux travaux dont je fus l'initiateur ou la cheville ouvrière, j'ai eu recours à de telles populations. Ce choix, à l'opposé des méthodes dites "cliniques", qui observent peu d'individus mais très en profondeur, présente, pour le chercheur, certains avantages et offre, pour les recherches, certaines garanties. Mais il est clair qu'il peut comporter cependant quelques contraintes quant à l'obtention et à l'interprétation des résultats

I.5.1. Etablir un catalogue hiérarchisé d'erreurs

Le recours à de vastes populations permet d'obtenir d'une manière assez fiable au moins deux sortes d'informations relativement à la production d'erreurs qui ne sont pas accessibles autrement.

D'une part, nous pouvons ainsi obtenir une très grande variété de productions erronées et en connaître la fréquence d'apparition. En particulier on peut, sans prendre un grand risque, supposer que si une erreur "possible" n'a pas été fournie par une population de 500 ou 1000 individus, c'est qu'elle n'est pas probable. Il est donc licite, pour des raisons d'encombrement de la mémoire du système par exemple, de ne pas la prévoir dans la construction d'un logiciel de diagnostic et de remédiation, ou bien de la placer dans un "îlot de connaissance" (chunk en anglais) d'erreurs, possibles "techniquement" mais peu probables, qui ne serait activé que dans le cas d'incapacité de ce logiciel à retrouver cette erreur en utilisant uniquement les "îlots" des erreurs fort probables.

D'autre part ces erreurs, en plus d'être ordonnées suivant leur fréquence d'apparition, peuvent être hiérarchisées. Il est ainsi possible de repérer soit des impossibilités d'apparition simultanée de certaines erreurs, soit, au contraire, des enchaînements privilégiés d'erreurs. Ce type de résultats conduit, dans le cas des "tutoriels intelligents" par exemple, à une amélioration des logiciels de diagnostic d'erreurs (création des "méta-règles").

I.5.2. Construire des questionnements

En travaillant avec de vastes populations, nous pouvons construire plusieurs variantes des questions, observer les effets de la variation et des croisements de certains paramètres (formulation des questions, valeurs numériques particulières,...) sur les comportements de réponse, et ainsi repérer les éléments permettant la construction de questionnements adéquats,

au sens vu plus haut, en particulier l'écriture de questions incitatives à l'erreur. Tout cela sans prendre le risque de réduire les effectifs de chaque groupe de testés à quelques individus.

I.5.3. Bénéficiaire d'outils statistiques

Déjà en 1980 (cf. <DUM80b>) j'avais mis en évidence certains "abus d'utilisation des statistiques en didactique des mathématiques". Ces remarques sont encore d'actualité. Il s'agit, dans certains cas, d'études portant sur des petits groupes de cobayes ou sur des populations non représentatives ("ou" non exclusif) mais dont les conclusions se veulent générales sous couvert de statistiques sophistiquées et, dans d'autres cas, de statistiques ne prenant pas en compte certains paramètres s'étant révélés, dans d'autres études, pertinents (voir par exemple au chapitre II mes observations sur la thèse de L. RADFORD).

Le choix d'échantillons numériquement suffisants (ne serait-ce que pour avoir des pourcentages qui soient des fréquences et non des extrapolations) et représentatifs d'une population bien déterminée (c'est-à-dire dont les caractéristiques pertinentes à l'étude considérée soient aisément identifiables et susceptibles de conduire à des conclusions généralisables) permet au chercheur d'asseoir ses études sur des bases solides et de recourir, si besoin est, à des outils statistiques.

Le lecteur trouvera dans les chapitres qui suivent des illustrations de cette possibilité allant de la simple statistique descriptive (taux d'apparition des différentes erreurs dans l'enquête sur les fractions, comparaison des pourcentages de "bonnes" réponses ou de non-réponses à des tests de même structure logique, étude des fréquences relatives de certains choix de réponses en fonction des différentes formulations proposées dans des Q.C.M.,...) à des statistiques très sophistiquées comme la recherche de composantes factorielles dans des nuages de points à multiples variables (recherche de facteurs pertinents pour l'interprétation de comportements de réponse : âge, origine géographique, formation scolaire,...), en passant par des corrélations linéaires (corrélation entre rang d'un exercice et taux d'abstention dans les concours en Q.C.M. de l'E.S.I.E.E.,...). Je mentionnerai à l'occasion les outils informatiques ayant servi à ces calculs et aux représentations graphiques associées.

I.5.4. Problèmes liés au dépouillement et à l'analyse des réponses

Comme je l'indique au chapitre III à l'occasion de la première enquête sur les fractions, un tel travail nécessite une réflexion didactique préalable afin de construire les premiers questionnaires et leurs variantes ; ensuite le travail de dépouillement et d'analyse requiert lui aussi un temps important. On comprend donc pourquoi ce travail a plus de chance de voir le

jour et d'aboutir s'il est pris en charge par une équipe de recherche plutôt que par un chercheur isolé, et pourquoi cette pratique est peu répandue.

Le choix de populations numériquement importantes implique donc des contraintes à l'équipe de recherche si elle veut obtenir le maximum d'informations des réponses des testés. En particulier, pour rendre raisonnable le temps de dépouillement d'une enquête, il est préférable de pouvoir recourir à l'informatique. D'où l'intérêt de travailler avec des questionnaires fermés, ceux-ci pouvant se prêter, par nature, à un tel traitement. Je présente dans cette thèse divers outils permettant de répertorier, de classer, voire d'interpréter des réponses, lors de la compilation de résultats d'épreuves papier-crayon ou lors de la passation de tests informatisés : repérages de mots-clefs (machine dédiée à l'enseignement : MITSUTM, langages-auteurs ou langage de programmation : DECALTM, TUTORTM sur PLATOTM, Basic sur MICRALTM), constitution de banques de données de réponses (dBASETM, EXCELTM), diagnostic "intelligent" d'erreurs (coquille de système-expert : NEXPERT-OBJETTM).

Bien que restant au sein des questionnements fermés, les traitements informatiques varient de manière évidente suivant le type considéré. Les questionnements fermés implicites font appel, dans le cas le plus simple, à des langages de programmation (éventuellement langages-auteurs), capables à la fois d'interdire à l'utilisateur un certain nombre de caractères, lors des passations sur terminal d'ordinateur, et d'associer la réponse de l'élève à l'une des solutions envisagées par l'auteur du test. Ceci s'appuie sur la reconnaissance de chaînes de caractères alphanumériques. Dans d'autres cas, comme pour les fractions, des mécanismes plus sophistiqués doivent être mis en place, pouvant aller jusqu'aux méthodes de l'Intelligence Artificielle pour des parcours dans des arborescences trop vastes.

Pour les questionnements fermés explicites, c'est-à-dire pour les Q.C.M., les difficultés de traitement informatique sont moins importantes mais, là encore, diffèrent d'un type à l'autre. Ainsi pour des Q.C.M. simples à n cases pouvant être ou non cochées, la machine devra, au maximum, faire face à 2^n formes possibles de réponse tandis que pour les questionnaires de véracité stricte il y aura jusqu'à 3^n possibilités. Pour ceux donnés à l'E.S.I.E.E., par exemple, on arrive ainsi à 3^5 . En fait, dans la pratique, comme je l'indique aux chapitre V, avec en moyenne un millier de candidats par concours, on n'enregistre que très rarement des questions fournissant plus d'une centaine de formes différentes de réponses. De plus, il est possible, par des systèmes de "filtres" et d'organisation préalable de la banque des réponses prévisibles ou réelles, de limiter considérablement le temps de dépouillement.

Il faut néanmoins remarquer qu'avec le traitement informatique des réponses il est plus difficile d'obtenir des informations sur les cheminements suivis par les apprenants pour arriver à telle ou telle erreur. L'indication écrite des étapes d'un calcul ou d'un raisonnement peut, assez souvent, fournir des éléments suffisants pour une analyse du comportement de réponse, mais ne peut remplacer, pour les cas douteux, le dialogue avec l'apprenant lui-même. C'est un problème analogue qui se pose dans le cas de logiciels de diagnostic d'erreurs (cf. chap. III et IV). Malgré les progrès réalisés dans le domaine du graphisme en informatique, il n'existe pas, à l'heure actuelle, un logiciel capable de laisser l'apprenant se servir de l'écran comme d'un brouillon puis d'analyser cette production. Ceci, dans le cas général, pourrait être assimilé au difficile problème de la reconnaissance des formes. Il faut donc continuer à travailler en deux temps : tout d'abord mener des enquêtes papier-crayon avec, au moment opportun, des invitations à l'écriture et à la conservation de brouillons, ensuite construire un logiciel intégrant le résultat de ces enquêtes et pouvant demander à l'apprenant, le cas échéant, soit de comparer sa démarche à celles proposées par le programme, soit de fournir quelques résultats intermédiaires. Dans le cas particulier des formules mathématiques, et des expressions relativement simples comme les fractions on peut imaginer néanmoins qu'une solution informatique pourrait être trouvée si le besoin se faisait vraiment pressant chez les utilisateurs, moyennant, sans doute quelques restrictions de la liberté d'écriture de l'utilisateur à l'écran.

I.5.5. En conclusion

Les aspects méthodologiques que je viens de présenter visent en fait un but simple : la validité des recherches. Il s'agit d'essayer de s'inspirer, pour la didactique des mathématiques, des règles de fonctionnement issues de la recherche en sciences expérimentales. J'espère illustrer, avec cette thèse, quelques voies possibles allant dans ce sens.

CHAPITRE II

UNE CERTAINE IDÉE
DE
L'IMPLICATION

Lorsqu'à la fin des années 70 j'écrivais ma thèse de 3ème cycle, j'avais le naïf espoir d'avoir apporté quelques solides preuves du caractère mal fondé de certains stades piagétiens de développement, des preuves de l'absence d'intérêt d'exercices "concrets" de pseudo-mathématiques pour aborder cette discipline et au danger de laisser croire que les tests d'orientation sur l'"implication" pouvaient- sous couvert de scientificité- séparer à l'avance les futurs bons élèves en mathématiques des autres.

Presque dix ans plus tard, ces tests existent toujours, certains collègues vont même jusqu'à reprendre certains des miens et, croyant sans doute me faire plaisir, avouent les trouver bien meilleurs pour faire comprendre la logique formelle !

Pour ce qui est du problème qui nous intéresse plus particulièrement dans cette thèse, à savoir le questionnement en mathématiques, je souhaite présenter ici quelques données, dont certaines inédites, issues de ces enquêtes.

II.1. Situation de ma problématique et publications antérieures à ma thèse de 3ème cycle

Pour revenir aux sources du problème, déjà développées dans ma thèse, je me contente ici de rappeler que ce dont il est question est l'utilisation de questions non mathématiques portant, d'après leurs auteurs, sur l'implication, soit par des psychologues soit par des enseignants/didacticiens des mathématiques. Mon travail avait pour but de vérifier expérimentalement ce que d'autres pensaient depuis longtemps, comme Oswald DUCROT ou Daniel LACOMBE , à savoir que ces épreuves ne permettent pas d'évaluer l'aptitude d'individus à la maîtrise de concepts mathématiques comme l'implication.

En effet dans le langage naturel, et souvent même dans le langage des mathématiques , le "si...,(alors)..." ne rend pas compte de l'implication :

-> le plus souvent la quantification universelle est implicite mais, même quand elle est explicite, elle reste floue; l'emploi du présent duratif supporte, dans le discours habituel, des transgressions de règles sans amener de contradiction; ainsi à partir de l'énoncé du test sur le cambriolage -figure II.1 ci-dessous- il ne serait pas "illogique" d'admettre que : "ce malfaiteur découpe toujours un carreau pour entrer par la fenêtre, mais ce soir là il n'a pas eu besoin de le faire puisque la fenêtre était ouverte "; c'est d'ailleurs ce qu'un testé a donné comme commentaire,

Le malfaiteur que la Police recherche procède toujours de la même façon :

- s'il y a un signal d'alarme sur la porte, alors il entre par la fenêtre,
- s'il entre par la fenêtre, il découpe un carreau.

Pour son dernier cambriolage, ce malfaiteur est entré par la fenêtre.

Cochez la ou les conclusion(s) qui vous semblent juste(s) :

- Pour ce cambriolage, il a découpé un carreau
- Pour ce cambriolage, il n'a pas découpé un carreau
- Pour ce cambriolage, on ne peut pas savoir s'il a découpé un carreau

- Il y avait un signal d'alarme sur la porte
- Il n'y avait pas de signal d'alarme sur la porte
- On ne peut pas savoir s'il y avait un signal d'alarme sur la porte.

figure II.1 : test C1 (épreuve 2)

(test "officiel" repris sans modifications)

-> très souvent, en raison du principe du maximum d'information, le "si..., (alors)..." traduit une équivalence; ainsi l'énoncé "Si Olivier vient chez vous dîner ce soir, je ne viens pas" sous-entend, dans le discours habituel : "mais s'il ne vient pas, alors moi je viens ",

-> les énoncés en "si..., (alors)..." sont rarement contraposables (cf. l'exemple célèbre proposé par Daniel LACOMBE : "si tu as soif, il y a de la bière dans le frigo") ou demandent des modifications de temps pour les verbes considérés et/ou le recours à des mots de liaison supplémentaires, par exemple : "si Denise rate son bac, elle ne part(ira) pas en vacances" serait transformé en "si Denise ne part pas en vacances, c'est qu'elle a raté son bac".

Par la même occasion j'espérais apporter des arguments pour une remise en question de la notion de développement intellectuel suivant des "stades" dont le dernier, le stade "formel", serait atteint par des individus capables de raisonner, dans des contextes non mathématiques, suivant des schémas relevant de la logique mathématique. Ce point me paraît d'autant plus important qu'il ne s'agit pas seulement de discussions intellectuelles "de salon" mais bien de tests réellement utilisés pour des orientations scolaires ou professionnelles.

Mon travail sur l'implication venait après des articles nombreux et variés publiés depuis la fin des années 60. Les plus célèbres auteurs sont les anglais WASON et JOHNSON-LAIRD

et l'américain O'BRIEN pour l'aspect "compréhension du raisonnement". Il faut mentionner enfin des travaux de psychologues français qui, à la suite de LONGEOT et dans une perspective de psychologie différentielle, introduisirent ce type de tests dans des épreuves destinées à mesurer l'intelligence des enfants et à déceler leur aptitude aux mathématiques, s'appuyant aussi pour cela sur certains travaux de PIAGET et sur la notion de stades de développement intellectuel auxquels je faisais allusion précédemment.

Pour traiter de la compréhension de l'implication plusieurs approches sont possibles, mais seules certaines ont retenu l'attention des créateurs de tests. La plus courante, que j'illustrerai ensuite par des épreuves d'O'BRIEN et que l'on retrouvera aussi dans la thèse de Luis RADFORD, est du type suivant :

<1> on admet la véracité d'une proposition "Si X alors Y" , X et Y étant des variables (implicitement ou explicitement présentées comme telles), et l'on demande de conclure suivant que l'on donne en plus X, $\neg X$, Y ou $\neg Y$.

La seconde, rendue célèbre par WASON, invite le lecteur à définir de quelle information il a besoin pour déclarer si une proposition "si X alors Y" est vraie ou fausse (<2>).

Dans ma thèse j'ai présenté aussi d'autres formes:

<3> le lecteur ayant toutes les informations voulues sur un certain domaine (quantification restreinte), il lui est demandé de dire si une proposition "si X alors Y" est vraie ou fausse; le test F.5 entrant dans cette catégorie illustre les problèmes liés à l'absence de variables (le lecteur pourra voir à la page 47 le texte de ce test et le détail des résultats);

<4> une variante de cette situation consiste à fournir une règle de type "si X alors Y" et de demander au lecteur si elle a été suivie ou non (cf. ci-dessous article de JOHNSON-LAIRD sur les enveloppes timbrées).

Une dernière forme <5> n'a, à ma connaissance, jamais été proposée; c'est celle qui consisterait, comme pour des fonctions de deux variables pour lesquelles on demande de calculer $f(x,y)$ pour des valeurs particulières de x et de y, à donner une proposition "si X alors Y" et à demander sa valeur de vérité suivant différentes valeurs données à X et à Y. Nous avons cependant construit des tests s'inspirant de cette idée, j'y reviendrai pour parler de la nécessité d'introduire des variables dans des propositions en "si...(alors)...".

Des variantes sont possibles à partir de ces formulations de base en remplaçant par exemple "si X alors Y" par "pour tout x de X, x appartient à Y". Des disciples de PIAGET ont d'ailleurs beaucoup travaillé sur "l'inclusion de classes" pour la détermination des "stades de développement" (cf.<BID76>).

Thomas O'BRIEN, dans le début des années '70, avait pour objectifs l'évaluation de la capacité d'adolescents et d'enfants à maîtriser l' "opération logique d'implication" et la détermination de différents types de pseudo-logiques. Pour ce faire il avait construit un certain nombre de tests du type <1>, un exemple est donné dans <O'BR72>, page 401:

If the car is shiny, it is fast.

The car is shiny.

Is the car fast?

(a) Yes

(b) No

(c) Not enough clues.

On peut être surpris que de tels textes n'aient pas provoqué de refus de la part des élèves et que l'auteur n'ait pas cherché à vérifier, sur un échantillon plus représentatif qu'une vingtaine de jeunes filles d'une école paroissiale américaine, ses résultats. On peut aussi s'étonner de ses catégories: "if the horse is red, it is big" en "class inclusion" ou "If the hotel is pleasant, Jane is young" en "random"; pourquoi pas le premier en "nonsense" et le second en "causal" ? On conviendra aisément que de telles épreuves n'apporteront pas beaucoup d'information sur l'intelligence des sujets qui y réussiraient...ou y échoueraient !

Du côté des psychologues scolaires, on trouve clairement explicitée l'utilisation de tests "logiques" pour la détermination du "stade formel". Ainsi dans l'article de HUG et LONGEOT <HUG75>, c'est un test du type <1> ("Si la police suit une mauvaise piste, alors les journaux annoncent de fausses nouvelles") qui aide à classer les enfants dans les différents stades concret, préformel ou formel suivant les réponses fournies. De même le test sur le cambriolage, que j'ai repris dans mon étude et que je présenterai en détail plus loin, provient d'une batterie de tests de l'E.C.D.L.2 destinée aux Centres d'Observation Scolaire et Professionnelle, sous la rubrique "logique des propositions" (cf. fig. II.2 ci-dessous).

Jojo procède toujours de la même manière :

- . s'il y a un signal d'alarme dans la maison, alors il utilise une fausse clef.
- . s'il utilise une fausse, alors il travaille de nuit.

On sait que pour son dernier cambriolage, il a utilisé une fausse clef.

Soulignez la ou les conclusions qui vous paraissent justes.

- . Jojo a travaillé de nuit pour son dernier cambriolage.
- . Il n'a pas travaillé de nuit.
- . On ne peut pas savoir s'il a travaillé de nuit.
- . Il y a un signal d'alarme dans la maison.
- . Il n'y a pas de signal d'alarme.
- . On ne peut pas savoir s'il y a un signal d'alarme.

figure II.2 : test C2 (épreuve 7)
(test "officiel" repris sans modifications)

Enfin, l'article de J. PELNARD-CONSIDERE (<PEL75>) présente clairement cette utilisation :

"Les épreuves à passation collective élaborées par LONGEOT ont fourni trois indicateurs de niveau de développement logique, en fonction desquels les enfants ont été classés. Ce sont des tests psychogénétiques portant sur les opérations formelles.(...) le troisième, la Logique des Propositions, est centré sur ce que PIAGET appelle le groupe INRC, autrement dit l'ensemble des quatre transformations logiques (identité, inversion, réciprocity, corrélation) qui commande la compréhension des structures algébriques et topologiques."
(p.22)

A la page 25 de cet article figure un tableau qui donne, pour l'exercice numéroté 11, les caractéristiques suivantes :

- dénomination : implication,
- opérations mises en jeu : compléter une phrase exprimant une implication,
- difficultés particulières: résistance à la fausse réciprocity.

Cette "difficulté" qui consisterait à confondre "implication" et "équivalence logique" sert, entre autres choses, à caractériser le "stade formel" (lorsqu' on y résiste !). Sans vouloir développer ici les arguments qui mettraient en évidence que ce que les auteurs appellent "logique des propositions" n'est pas utilisé en mathématiques puisque -apparemment- ces auteurs ne prennent en compte ni les prédicats ni les quantifications, on peut faire remarquer qu'ils font eux-mêmes la confusion "implication-équivalence" qu'ils stigmatisent...ne seraient-ils donc pas encore au stade formel ? En effet à cet exercice n°11 de l'épreuve E.S.R.M. 7/6, trouvé et analysé par Josette ADDA (in <ADD76b>) :

" Complétez la 2e phrase en écrivant un ou plusieurs chiffres :

Si un nombre se termine par 2 alors il est pair.

Si un nombre est pair, alors il se termine par ... "

les "bonnes réponses", valant 2 points, sont : "0, 2, 4, 6, 8" et, ce qui est discutable, "2, 4, 6, 8, 10" mais, de plus, il est précisé que toute réponse contenant des nombres "en plus" (sic) doit être considérée comme fausse !

J'ai rappelé ces références pour deux raisons principales : d'une part elles prouvent que telles épreuves sont réellement utilisées pour classer des individus et, d'autre part, qu'elles sont justifiées par des références à la logique mathématique. Si de tels stades de développement existaient, et en particulier un stade formel, le comportement de réponse à des épreuves de type "logique" serait indépendant de l'"habillage" choisi (cf. <ADD76a>). Or ces tests ne sont pas utilisés parce qu'ils répondent à ce critère mais, inversant les priorités, ils ont été construits puis étalonnés en respectant une courbe gaussienne "classique", déterminant ainsi les surdoués, les normaux et les anormaux. Un des objectifs de mon travail était de mettre en évidence que la démarche inverse, et intellectuellement "honnête", qui consisterait à chercher des tests pouvant prédire le comportement "logique" des testés, était une démarche difficile.

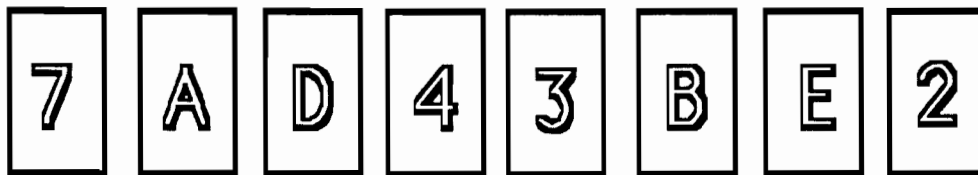
Pour ce faire j'ai décidé d'observer comment se comportaient des jeunes gens de tout niveau scolaire devant différents tests, dont certains utilisés par des psychologues, en particulier des individus en fin d'études supérieures qu'il serait difficile de ne pas supposer être arrivés au stade formel. Les résultats sont écrasants de clarté; je les exposerai précisément plus loin.

Les travaux de WASON (cf.<WAS68>) illustrent bien le type <2>: dans un premier temps avec une expérience de type "clinique" (c'est-à-dire avec une observation de "cobayes") avec manipulation d'objets réels, puis une épreuve papier-crayon, il s'agissait d'observer des

cartes ayant des chiffres d'un côté et des lettres de l'autre puis de faire choisir au concurrent, parmi quatre cartes déposées sur la table, celle(s) qu'il avait besoin de retourner pour savoir si une phrase du type suivant était vraie ou fausse : " si une carte porte une voyelle sur une face alors elle porte un chiffre pair sur l'autre face " (cf. fig. II.3 ci-après).

On a huit cartes : chacune de ces cartes porte sur une face une lettre et sur l'autre un nombre. Ces cartes sont posées sur une table, ce qui fait qu'on ne voit que l'une des faces.

Voici ce qu'on voit :



On rappelle que les voyelles sont : A, E, I, O, U, Y
que les nombres pairs sont : 2, 4, 6, 8,...

On considère la phrase suivante :

SI UNE CARTE PORTE UNE VOYELLE SUR L'UNE DES FACES
ALORS ELLE PORTE UN NOMBRE PAIR SUR L'AUTRE FACE.

Si l'on pouvait retourner toutes les cartes, on saurait si cette phrase est vraie ou fausse; mais il est peut-être suffisant de n'en retourner que quelques unes.

|| ENTOUREZ TOUTES LES CARTES QU'ON A BESOIN DE
|| RETOURNER POUR SAVOIR SI LA PHRASE EST VRAIE OU FAUSSE.

fig. II.3 : Test K.4

(version réalisée à l'U.E.R. de Didactique des Disciplines de Paris 7
d'après le test des cartes de WASON)

Cet exercice est d'un autre niveau de difficulté que ceux que nous venons de voir : c'est plus une méta-question qu'une question; on n'affirme pas qu'une proposition, aussi farfelue soit-elle, est vraie mais on demande quelle information il faut connaître pour en juger la

véracité ! Dans un cadre scolaire on se heurte à l'habitude selon laquelle ce que dit le professeur, ce qu'il encadre, est VRAI et n'a pas à être remis en question (ce qui explique sans aucun doute l'absence de non-réponses dans les tests d'O'BRIEN). Ailleurs on peut constater aussi l'influence du contexte social ou professionnel dans le comportement de réponse ainsi, par exemple, dans une pré-enquête réalisée au sein de militaires de carrières, j'ai pu constater que beaucoup essayaient de trouver un code à partir des lettres et des chiffres fournis dans l'énoncé.

Certains commentaires recueillis à cette occasion en sont témoins :

"Chaque chiffre correspond à une lettre il faudrait savoir la valeur de celui-ci par rapport à la lettre"

"Ma réponse est Madame"

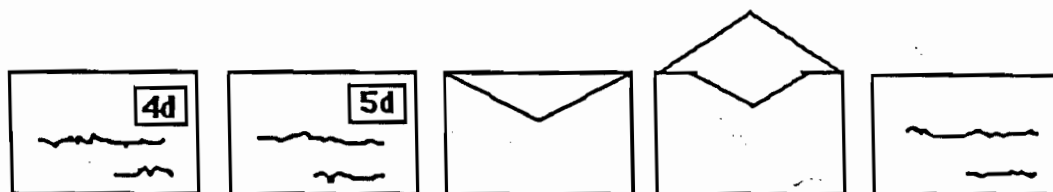
"Il est très rare de trouver des doubles consonnes et voyelles qui terminent un mot".

Dans l'ensemble des différentes variantes expérimentées pour ma thèse de 3ème cycle le taux de réussite moyen est très faible : 20 sur 800 avec un fort taux de non-réponses : 38 % . En fait la difficulté majeure reste, pour la plupart des testés, de comprendre quelle est la question posée. On notera qu'à ce problème majeur s'ajoute :

- des difficultés linguistiques : ainsi, par exemple, il existe quatre "si" dans ce seul problème !

- des problèmes "logiques" : le "entourez toutes les cartes qu'on a besoin de retourner..." doit être interprété, pour que la "bonne réponse" consiste à retourner les cartes dont les faces visibles portent une voyelle ou un nombre impair ("bonne" réponse attendue), comme : "entourez toutes les cartes qu'on a besoin de retourner...dans le cas le plus défavorable"; en effet supposons (dans le cas d'une situation "réelle") que l'on commence par retourner le 7 et qu'au dos figure , par exemple, un 6 : on pourrait alors conclure, sans avoir besoin de retourner plus de cartes, que la phrase considérée est fausse.

Ma collègue Claire TERLON ayant retrouvé un article de JOHSON-LAIRD de 1972 que je ne connaissais pas, je pense intéressant, pour compléter cette situation historique, de le commenter ici (cf. fig. II.4 ci-après). Il y est présenté les résultats d'une étude menée sur une population de 24 étudiants (payés pour servir de cobayes). Tous eurent à passer quatre épreuves, deux inspirées des "cartes de WASON" et deux portant sur des enveloppes timbrées. Les résultats réjouissent les auteurs: 22 réussites à au moins une des épreuves de ce dernier type contre seulement 7 pour les cartes. En soulignant que ceci confirme mes



Reasoning and sense of reality

METHOD

Design

Each subject acted as his own control and performed the four versions of the selection task generated by combining the two sorts of material (realistic *v.* symbolic) with the two sorts of verbal formulation of the rule (*if-then v. only if*). Since the lexical material was varied from one condition to another in order to minimize residual effects, the following four rules were used:

- (1) If a letter is sealed, then it has a 50 lire stamp on it. (Realistic, *if-then*.)
- (2) A letter is sealed only if it has a 5d stamp on it. (Realistic, *only if*.)
- (3) If a letter has an A on one side, then it has a 3 on the other side. (Symbolic, *if-then*.)
- (4) A letter has a D on one side only if it has a 3 on the other side. (Symbolic, *only if*.)

The order of presentation of the conditions was counterbalanced, with Williams Squares, in order to detect transfer effects from one condition to another.

Materials

Five ordinary envelopes (12 × 8 cm) were used in each of the four conditions (see Fig. 2). For rule (1), they had Italian addresses, and the stamps were 40 or 50 lire. For rule (2), they had English addresses, and the stamps were 4d. or 5d. For rule (3), they consisted of the following items: 'A' on the front of an envelope, 'B' on the front of an envelope, '3' on the back of an envelope, '2' on the back of an envelope, and, finally, a blank envelope face uppermost. An equivalent set of envelopes was prepared for rule 4.

Subjects

Twenty-four undergraduates of University College London, acting as paid volunteers, were tested individually. They had no previous experience with this type of task.

Procedure

The subjects were told that the experiment concerned reasoning but that it was not a test of their intelligence. On the first occasion that a subject encountered a realistic condition he was asked to imagine that he was a post-office worker sorting letters; otherwise, he was merely told that he would have to examine some envelopes. The specific rule was then presented and the subject instructed to 'select those envelopes that you definitely need to turn over to find out whether or not they violate the rule'.

After the four selection tasks had been carried out, the subject was asked whether they were similar and, if so, in what way.

fig. II.4 : Extraits de la procédure d'expérimentation sur les enveloppes

résultats, il est intéressant de regarder de plus près le contenu des questions. Tout d'abord et contrairement à la version de WASON, il ne s'agit pas ici pour les cobayes d'indiquer les cartes (ou les enveloppes) qu'il faudrait retourner pour savoir si une phrase est vraie ou fausse, mais, ce qui est plus simple, une phrase étant donnée comme vraie (comme étant une "règle"), regarder les cartes (ou les enveloppes) qui risquent d'être en contradiction avec cette règle; on est donc dans le type <4>. En plus, dans le cas des enveloppes, le problème est posé avec une mise en scène favorisant cette approche : il faut que le cobaye joue au postier ayant une règle administrative à appliquer: "si une enveloppe est cachetée alors elle est timbrée à 5d". Il s'agit donc bien de repérer les éventuels contrevenants. Or apparemment les auteurs n'ont pas remarqué que ce contexte n'est pas neutre pour les cobayes et qu'ils ont à leur disposition d'autres règles relevant du même domaine de l'affranchissement : une enveloppe non cachetée peut souvent bénéficier d'un tarif réduit, une enveloppe trop affranchie est acceptée sans difficulté. La première règle invite à ne pas retourner l'enveloppe non cachetée (et évite le piège classique), la seconde aurait été intéressante si les auteurs avaient prévu une enveloppe timbrée par exemple à 6d au lieu de l'être à 4d ou à la place de l'enveloppe non timbrée; en effet les "puristes" auraient refusé une telle enveloppe si elle avait été cachetée tandis que les "pragmatiques" l'auraient acceptée !

Jérôme CHASTENET de GERY pose la question des interprétations possibles du "has a 5d stamp on it" qui peut signifier simplement que la lettre est timbrée à 5d ou bien aussi qu'elle possède un timbre à 5d...mais d'autres peut-être en plus. De toute façon, et ce point me paraît essentiel, deux seulement des vingt-quatre cobayes, pourtant fortement scolarisés, ont déclaré (sur question des observateurs) voir une similitude entre les structures logiques sous-jacentes aux quatre épreuves.

II.2. Méthode et moyens de ma recherche

Comme je l'ai rappelé dès le début de ce chapitre, il n'était pas question de créer une "bonne batterie de tests" sur l'intelligence ni même de traiter de manière exhaustive tous les aspects logiques que l'on trouve dans les épreuves classiques dans ce domaine. L'étude a été focalisée sur l'"implication", qui est au centre du "stade formel" et qui est, pour les enseignants de mathématiques, un sujet fondamental mais difficile à enseigner.

Le matériau de base fut constitué à partir de tests existants et supposés, par leurs auteurs, être capables de juger l'aptitude d'individus (indépendamment de leur niveau scolaire) à maîtriser l'implication. Reprenant les prétendus "schémas logiques sous-jacents" j'ai construit, avec l'aide de Daniel LACOMBE et de Josette ADDA, d'autres tests ayant des *décors*, des *formulations* ou des *présentations* différents afin d'évaluer l'influence de ces facteurs sur le comportement de réponse des testés. D'autres tests furent construits pour

répondre à des interrogations que nous avons sur des types autres que les <1> ou <2> plus classiques. Les 54 tests ainsi obtenus furent associés deux par deux pour former 27 épreuves en permettant des croisements. Dans chaque "famille" de tests on trouve entre 2 et 8 variantes, les variations portant sur différents types de quantification, différentes formulations de l'"implication" ("si...(alors)...", "pour tout...tel que...",...) et formulations des réponses proposées (phrases à souligner, cases à cocher, possibilité de "je ne sais pas" ou "on ne peut pas savoir",...). Chaque testé disposait de 20 minutes pour passer une seule épreuve de 2 tests. La passation était anonyme et le testé avait la possibilité de s'exprimer sur la facilité et l'intérêt de chaque test (sous forme de Q.C.M. : facile/difficile; intéressant/sans intérêt/stupide); une place était disponible au bas de chaque page pour recueillir des commentaires ouverts.

Tous les textes des tests, les résultats principaux (globaux et croisés, certains item par item) et tous les commentaires (avec les caractéristiques des candidats) sont donnés en annexe de ma thèse de 3ème cycle.

En réaction aux choix de mes prédécesseurs qui n'avaient étudié que de petites populations en milieu scolaire, et aussi pour étayer mon argumentation sur le "stade formel", j'ai fait passer mes épreuves à une très vaste population hétérogène du point de vue du niveau scolaire (du quasi illettré au diplômé d'études supérieures) et de l'origine géographique (population urbaine et population rurale). J'ai, en effet, obtenu du Ministère de la Défense, à la fin des années '70, de tester des jeunes gens lors de leur passage (obligé) au Centre de Sélection de Vincennes, près de Paris. En deux ans j'ai pu ainsi contacter près de 2800 garçons entre 17 et 25 ans. Chaque épreuve fut passée par environ une centaine de personnes. Le Ministère de la Défense nous communiquait pour chacune d'entre elles le niveau scolaire et le résultat aux tests psychométriques de l'armée (ce dernier sous la forme d'une note entière comprise entre 1 et 20, appelée niveau "général").

Les niveaux scolaires étaient définis comme suit :

- 1 : illettré
- 2 : sait lire et écrire - 3ème pratique
- 3 : C.E.P. - 4ème - 3ème - préparation C.A.P.
- 4 : C.A.P. - B.E.P.C. - B.E.P. - 2de - 1ère
- 5 : terminale
- 6 : baccalauréat
- 7 : 1ère année d'enseignement supérieur validé
- 8 : licence - maîtrise - ingénieur "petite" école
- 9 : 3ème cycle - ingénieur "grande" école.

De plus, les candidats nous donnaient leur département d'origine et leur âge.

Le traitement informatique, fait à l'époque, se limita à des tris croisés. Récemment j'ai pu, grâce au concours du Service Informatique de l'I.N.R.P., et avec l'aide de Madame Danielle TRANCART, traiter une partie de mes données de manière plus fine; les résultats de cette étude complémentaire sont présentés plus loin dans ce chapitre.

II.2.1. Niveau scolaire - Niveau "général"

Comme on peut le voir sur la figure II.5 ci-dessous, le niveau 4 est le plus fortement représenté; on peut regretter que cette catégorie englobe des populations aussi différentes -du point de vue scolaire- que les titulaires d'un C.A.P. d'une part, et les élèves de 1ère, d'autre part.

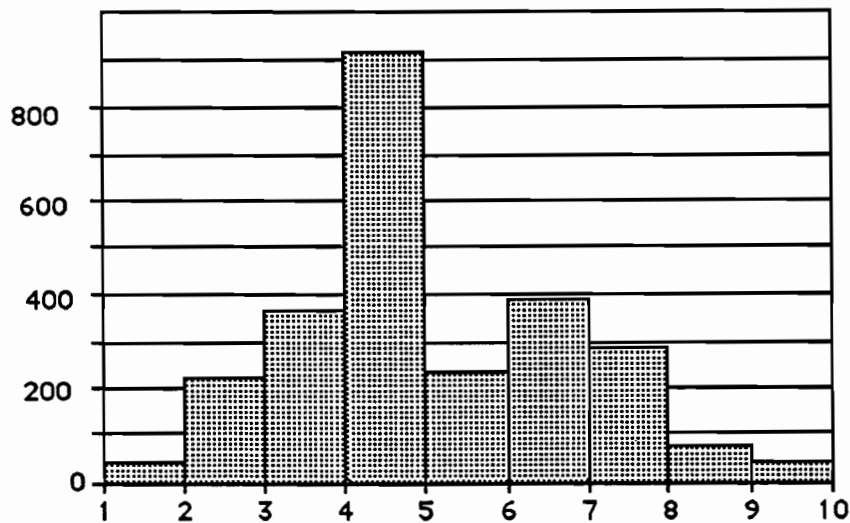


fig. II.5 : Répartition par niveau scolaire

D'après les barèmes de correction utilisés par l'armée pour ses tests psychométriques, chaque note correspond à un niveau "général" entre 1 et 20 et représente 5% de la population totale; on voit donc ici (fig. II.6 ci après) un échantillon qui s'éloigne de la moyenne nationale (les 5% sont matérialisés par la ligne horizontale près de 130) avec une proportion beaucoup plus forte de "bons" résultats aux tests psychométriques (moyenne = 12,65). Comme je le montrerai plus loin sur une population plus restreinte, on peut penser que cet apport provient un peu de la banlieue mais principalement de Paris.

Pour simplifier la lecture des résultats, les 9 niveaux scolaires et les 20 niveaux "généraux" ont été regroupés de la manière suivante (regroupements utilisés dans ma thèse de 3ème cycle) :

-> pour le niveau scolaire :

- Niveau I :** absence de scolarisation ou début de l'enseignement primaire (niveaux 1 et 2)
- Niveau II :** scolarisation courte ou moyenne : B.E.P.C. / C.A.P. /1ère (niveaux 3 et 4)
- Niveau III :** scolarisation longue : baccalauréat \pm 1 année (niveaux 5, 6 et 7)
- Niveau IV :** scolarisation longue et achevée (niveaux 8 et 9)

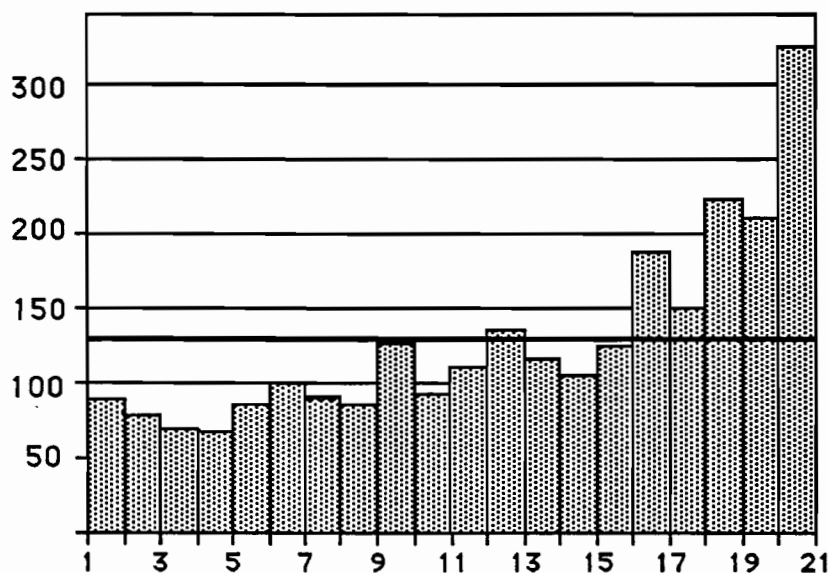


fig. II.6 : Répartition suivant les résultats aux tests psychométriques de l'armée (niveau "général")

-> pour le niveau "général" :

- Niveau F :** faible ($1 \leq NG \leq 10$)
- Niveau M :** moyen ($11 \leq NG \leq 15$)
- Niveau B :** bon ($16 \leq NG \leq 18$)
- Niveau TB :** très bon ($18 < NG \leq 20$)

La corrélation entre ces deux variables est de 0,6; les graphiques des figures II. 5 et II.6 ci-dessous mettent en évidence l'existence de populations de niveau scolaire moyen mais de bon niveau "général". Les épreuves fournies par l'armée sont donc, comme leurs utilisateurs le pensent, assez peu liées aux connaissances scolaires.

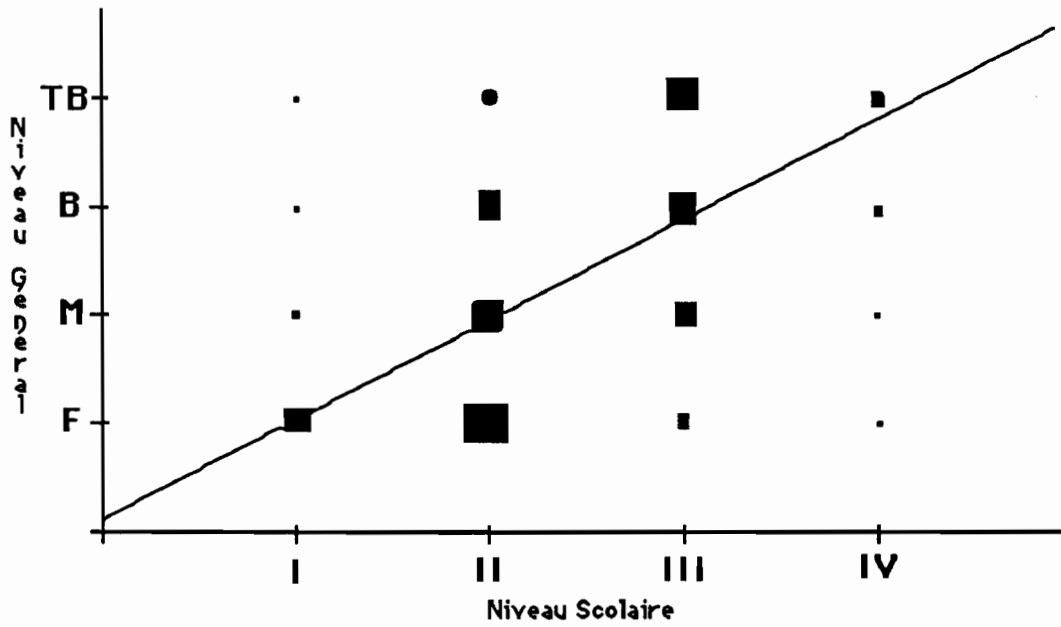


figure II.7 : Répartition suivant les niveaux scolaire et "général".
Droite de régression.

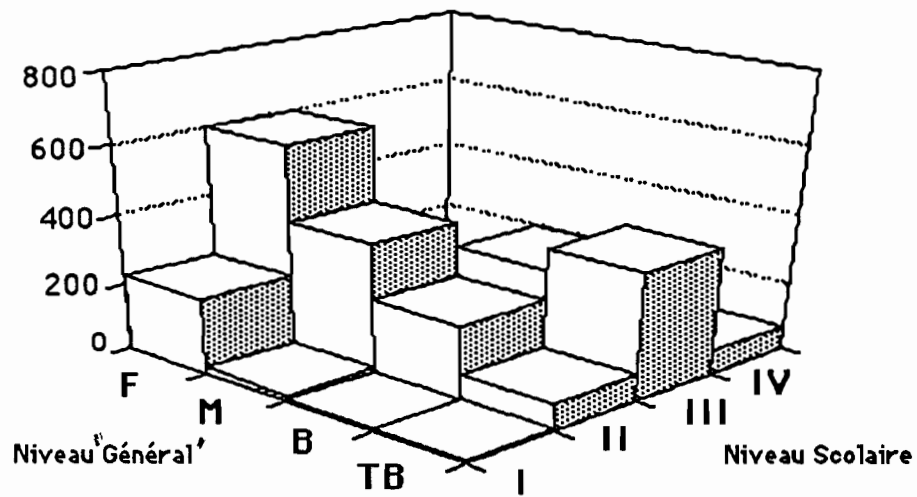


figure II.8 : Histogramme 3-D : répartition suivant les niveaux scolaire et "général".

II.2.2. Origine géographique - Age

Dans mon étude initiale je n'ai pas pris en compte ces facteurs. Dans la nouvelle j'ai considéré une population de 405 individus, 205 ont passé les épreuves 2 ou 7, et sont donc issus de la population générale de ma thèse de 3ème cycle, 200 ont passé les épreuves 27 et 28, postérieures à celle-ci, épreuves qui m'ont servi à l'étude du "JE NE SAIS PAS"/"ON NE PEUT PAS SAVOIR" à laquelle je consacrerai, plus loin, un paragraphe. Cette population de 405 jeunes gens se répartit géographiquement comme suit :

- (1) Paris : 175
- (2) Banlieue parisienne : 118
- (3) Province (Seine-Maritime et Eure) : 112

II.2.3. Répartition origine géographique / niveau "général"

Comme nous l'avons vu précédemment (fig. II.6) la population passant au Centre de Sélection de Vincennes n'est pas un échantillon représentatif de la population française de l'ensemble des centres de recrutement en raison, en particulier, d'un grand nombre de très bons résultats aux tests de l'armée. L'histogramme ci-dessous met en évidence la part importante que prend Paris dans ce fait.

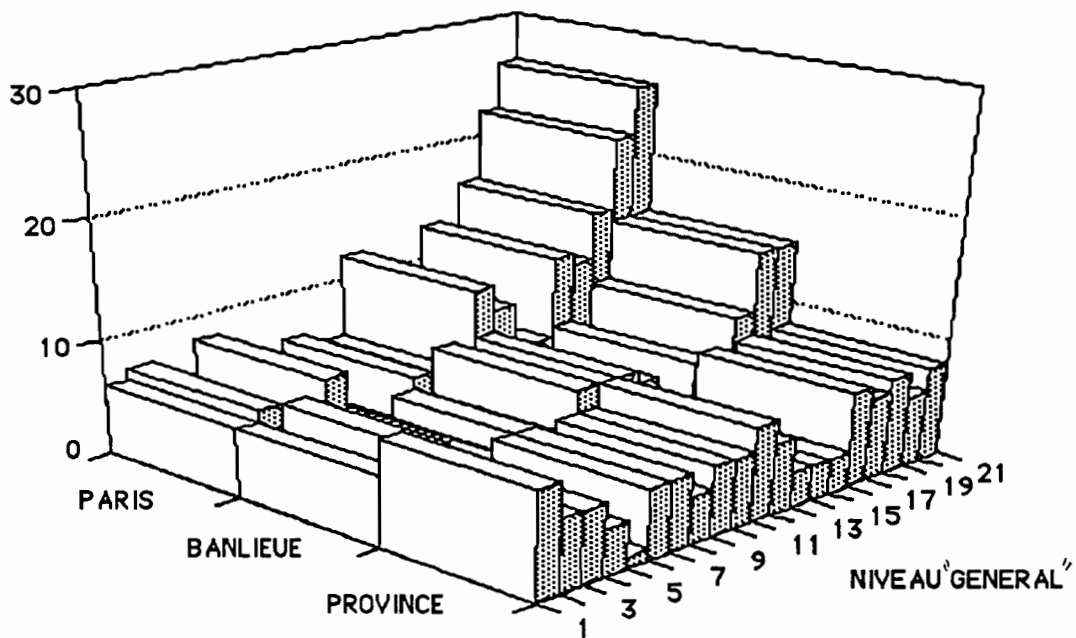


fig. II.9 : Histogramme 3-D niveau "général"/origine géographique

II.2.4. Répartition origine géographique/niveau scolaire

Comme on le voit nettement sur l'histogramme (fig. II.10) ci-dessous, Paris se distingue des deux autres régions par un très grand nombre de jeunes de haut niveau scolaire.

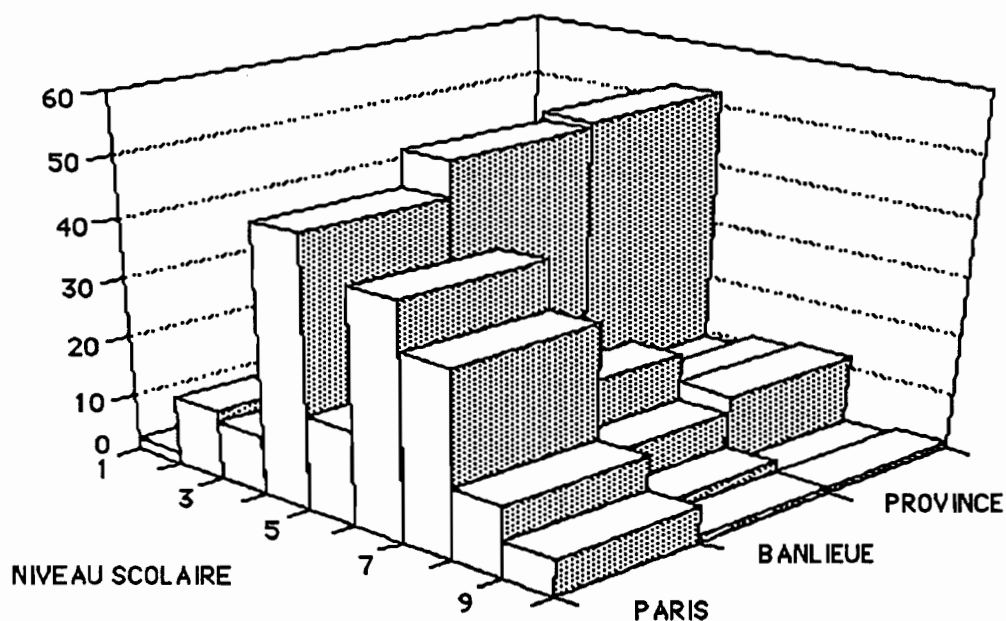


fig. II.10 : Histogramme 3D niveau scolaire / origine géographique

II.2.5. Répartition âge/origine géographique

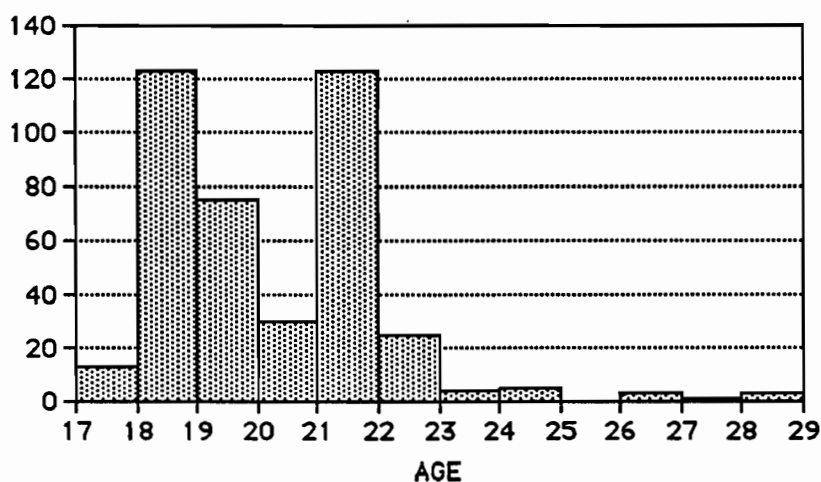


fig. II.11 : Histogramme des âges

Ce que l'on vient de voir pour la scolarité peut sans doute expliquer que ce soit sur Paris (cf. fig. II.12 ci-après) que l'on trouve la majeure partie des gens plus âgés se présentant pour effectuer leur service militaire; en effet seuls les jeunes gens très scolarisés pouvaient obtenir des sursis d'incorporation, le "normal" se situant autour de 18 ans.

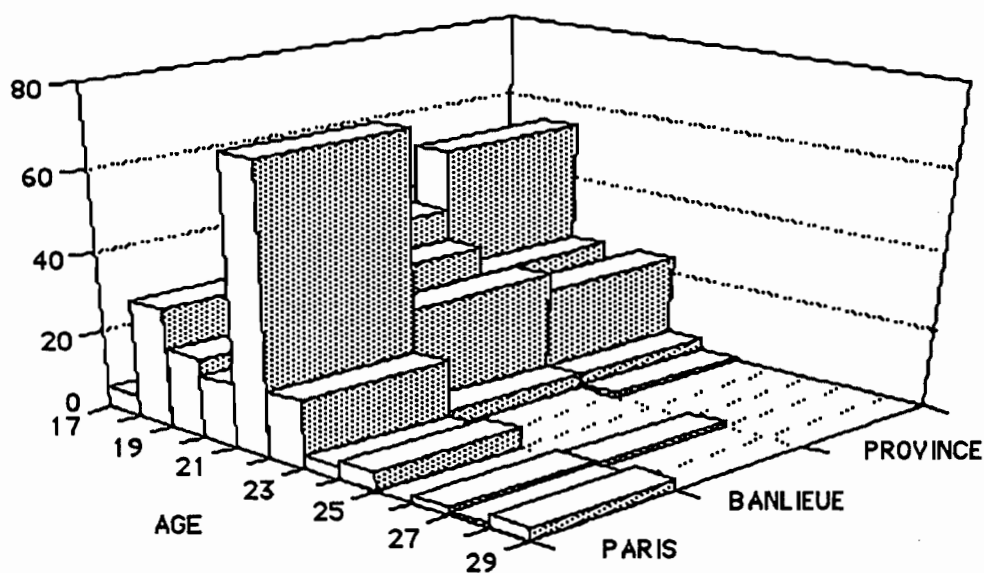


fig. II.12 : Histogramme 3D : Age / origine géographique

La question importante qui est à poser, en vue de savoir si les variables "age" et "origine géographique" sont pertinentes dans ce type d'étude est :

à niveau scolaire et niveau "général" identiques a-t-on un comportement de réponse différent suivant l'âge ou l'origine géographique ?

Nous avons utilisé notre population réduite (405 individus) pour tenter d'apporter une réponse à cette question, mais puisque la méthode consiste à observer des croisements, les intersections sont très réduites et les différences difficilement interprétables; il serait intéressant de reprendre la population complète, ce qui est encore possible puisque j'ai conservé toutes les copies, et considérer, par exemple, pour chaque test trois types de réponse: réponse "exacte", réponse "fausse" et non réponse. A titre d'illustration voici les résultats obtenus pour les tests C.1 (texte déjà vu page 3) et C.2 (différence : pour l'un cocher des cases, pour l'autre souligner son choix) à partir des 205 copies pour le niveau scolaire croisé avec l'origine géographique. Pour ces deux tests il y eut 21 "bonnes" réponses et 112 réponses de type "équivalence" (le lecteur trouvera au paragraphe suivant le sens de ces termes). La répartition est donnée dans les tableaux des figures II.13 et II.14 ci-après.

Je reste conscient que les pourcentages indiqués sont plutôt des extrapolations, c'est pourquoi j'ai parlé d'"illustration" de ce que pourrait être une étude "sérieuse" à partir des données complètes. Avec cette réserve, il semblerait ici que l'origine géographique ait peu d'influence sur l'erreur de type "équivalence" pour les niveaux scolaires II et III (les autres

ayant des effectifs vraiment trop restreints pour en tenir compte). En revanche les réussites, nettement plus importantes au niveau scolaire III, apparaissent plus fréquemment en banlieue qu'ailleurs; ce qui pourrait se traduire, en réponse à la question posée plus haut : à niveau scolaire post-baccalauréat égal, les banlieusards semblent mieux réussir aux tests dits "cambriolage" que les autres testés.

	PARIS	BANLIEUE	PROVINCE	
I	0 / 7 = 0%	0 / 4 = 0%	0 / 8 = 0%	0%
II	2 / 25 = 8%	2 / 38 = 5%	0 / 29 = 0%	4%
III	4 / 44 = 9%	4 / 13 = 31%	3 / 22 = 14%	11%
IV	4 / 12 = 33%	2 / 3 = 66%	0 / 0	6%
	11%	14%	5%	

fig. II.13 : Répartition des 10% de réussites aux tests C.1 et C.2 (21/205)

	PARIS	BANLIEUE	PROVINCE	
I	2 / 7 = 29%	2 / 4 = 50%	1 / 8 = 13%	26%
II	13 / 25 = 52%	23 / 38 = 61%	12 / 29 = 41%	52%
III	28 / 44 = 64%	8 / 13 = 62%	15 / 22 = 68%	64%
IV	8 / 12 = 67%	0 / 3 = 0%	0 / 0	53%
	58%	57%	47%	

fig. II.14 : Répartition des 55% d'erreurs "équivalence" aux tests C.1 et C.2 (112/205)

II.3. Principaux résultats

II.3.1. L'inexistence du "stade formel" des psychologues

Nous avons expérimentalement vérifié notre hypothèse de base :

La logique mathématique "classique" n'est pas celle qui permet à des individus, même fortement scolarisés, de répondre à des questions non mathématiques.

Les réponses fournies peuvent être généralement expliquées par des considérations liées au contexte du problème ou par des comportements de type scolaire : " qu'est-ce que l'auteur du test attend que je réponde ?", ou bien " Où est le piège ?".

Les individus observés ne suivent pas de démarches systématiques pour résoudre des problèmes ayant des contextes différents même si, pour les auteurs, il est possible de trouver des structures "logiques" sous-jacentes identiques. Ceci remet en question la croyance en un développement de l'intelligence suivant des stades liés à l'âge, chacun de ces stades pouvant être repéré par des comportements systématiques de réponse à des problèmes prétendument "logiques". Il s'agit de raisonnements à fondement linguistique (principe du maximum d'information, existence de présupposés,...), et non pas de raisonnements "formels". Il est d'ailleurs intéressant de noter que nos tests n'étaient pas présentés comme relevant de la "logique" ou des "mathématiques", contrairement à la plupart des expériences que j'ai citées précédemment (ou dans celles qui le seront à la fin de ce chapitre), et que peu de candidats, même parmi les plus scolarisés, y font appel dans leurs commentaires.

Les conclusions que je viens d'énoncer peuvent être étayées par les quelques résultats très significatifs suivants :

-> le modus ponens : dans la tradition "psychométrique", il s'agirait du cas élémentaire de la déduction et il ne poserait plus aucun problème même à des sujets jeunes; or en regardant les pourcentages de réussites obtenus à l'item correspondant à la situation: "on donne $X \Rightarrow Y$ et X , que dire de Y ?" pour les tests des séries B (droit de vote), L (cosmonautes) et J ("sans contexte"), dont on trouvera des exemples de textes plus loin, on trouve:

droit de vote : 80% cosmonautes : 48% "sans contexte" : 57%.

Je reviendrai sur le cas des textes des cosmonautes pour mettre en évidence les effets du "décor" dans le comportement de réponse et pour tenter de comprendre ce phénomène.

Il est intéressant de noter que Luis RADFORD, dans les textes qu'il étudie dans sa thèse (voir exemples plus loin), n'a pas jugé utile de poser aux élèves les items du type *modus ponens*.

-> la différence de comportement de réponse à deux tests ayant la même logique sous-jacente est, sans aucun doute, la meilleure illustration de cette absence de "stade formel" qui assurerait à ceux qui l'ont atteint de répondre "logiquement" sans risquer de se laisser porter par des contextes et de tomber dans le piège de la confusion entre "implication" et "équivalence". C'est dans ce but que j'ai réuni dans une même épreuve le test extrait de l'E.C.D.L.2 sur le cambriolage (codé C.2) et un test construit par mes soins sur le droit de vote (codé B.3), les deux étant du type <1> amélioré sous la forme suivante (voir textes ci-dessous) :

$X \Rightarrow Y$

$Y \Rightarrow Z$

Y vrai

Z est vrai / Z est faux / on ne peut pas savoir si Z est vrai

X est vrai / X est faux / on ne peut pas savoir si X est vrai

Jacques est Français et a un casier judiciaire vierge.	
On sait que :	
Si Jacques a pour année de naissance 1950 alors il a le droit de voter en 1979.	
Si Jacques a le droit de voter en 1979 alors il a le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire.	
On sait de plus que Jacques a le droit de voter en 1979.	
Cochez la ou les conclusion(s) qui vous paraisse(nt) juste(s) :	
Jacques a le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire	<input type="checkbox"/>
Jacques n'a pas le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire	<input type="checkbox"/>
Je ne peux pas savoir si Jacques a le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire	<input type="checkbox"/>
Jacques a pour année de naissance 1950	<input type="checkbox"/>
Jacques n'a pas 1950 pour année de naissance	<input type="checkbox"/>
Je ne peux pas savoir si Jacques a pour année de naissance 1950	<input type="checkbox"/>

fig. II.16 : test B3 (épreuve 7)
(test construit spécialement pour ma recherche)

Nous avons aussi étudié une variante du cambrioleur qui n'oblige pas le candidat à souligner mais à cocher des cases (codé C.1, déjà donné page 3) que nous avons associé à une version du droit de vote où la quantification était explicite (codé B.3). On remarquera que dans ce test j'avais changé la formulation du "troisième choix" avec un "je ne peux pas

savoir" qui ne sera pas utilisé ailleurs, les deux formulations principalement étudiées étant "je ne sais pas" et "on ne peut pas savoir".

Je consacre plus loin un paragraphe sur cette question; je reviendrai alors sur le cas du test B3.

Les échantillons étant à peu près semblables, les comparaisons furent aisées et les résultats globaux sont facilement interprétables. En appelant *réussite* la réponse attendue par les auteurs et utilisateurs de ce type de tests ("Z est vrai" + "on ne peut pas savoir si X est vrai"), *équivalence* l'erreur tout aussi attendue ("Z est vrai" + "X est vrai"), les résultats croisés furent les suivants :

cambriolage		réussite	équivalence	autres	TOTAL
vote	réussite	15	43	7	65 (32%)
	équivalence	3	39	24	66 (32%)
	autres	4	29	42	75 (36%)
TOTAL		22 (11%)	111 (54%)	73 (35%)	206

fig. II.17 : Résultats croisés entre la série "cambriolage" et la série "vote"

On voit immédiatement, et sans avoir recours à des statistiques fines, que le changement de décor a permis de tripler le nombre de "bonnes réponses". Ainsi donc, en prenant les tests sur le droit de vote on aurait trouvé 43 individus de plus arrivés au "stade formel", soit un passage de 11% à 32% de la population supposée être à ce stade...ce qui serait moins inquiétant pour l'avenir intellectuel de notre nation (sous-ensemble masculin) !

Comme je l'ai fait remarqué précédemment il faut aussi tenir compte que certains échecs sont venus d'erreurs au niveau du modus ponens et non de l' "équivalence" :

- uniquement pour le cambriolage : 23 erreurs, soit 11%,
- uniquement pour le vote : 14 erreurs, soit 7%,
- à la fois pour le cambriolage et pour le vote : 9 erreurs, soit 4% .

Si l'on prend les résultats obtenus avec toutes les variantes des tests "cambriolage" et "droit de vote", on obtient les pourcentages suivants :

réussite	:	cambriolage 10%	vote 30%
équivalence	:	cambriolage 51%	vote 34%

Il est tout aussi intéressant de regarder les comportements des candidats suivant les niveaux scolaires. En regroupant les résultats de toutes les variantes des tests "cambriolage" et "droit de vote", on obtient les répartitions suivantes :

cambriolage	I	II	III	IV	TOTAL
n. de testés	33	143	113	16	305
réussite	1	7 (5%)	16 (14%)	6	30 (10%)
équivalence	7	72 (50%)	68 (60%)	9	156 (51%)

droit de vote	I	II	III	IV	TOTAL
n. de testés	50	177	159	21	407
réussite	2	23 (13%)	84 (53%)	13	122 (30%)
équivalence	13	79 (45%)	42 (26%)	3	137 (34%)

fig. II.18 : répartition des "réussites" et des réponses de type "équivalence" suivant les niveaux scolaires (les pourcentages sont par colonne)

On constate que:

- le changement de décor ne profite guère aux individus du niveau I,
- le niveau II passe de 5 à 13% de réussites,
- le niveau III passe de 14 à 53% de réussites,
- le niveau IV ne réussit pas à 100% (surtout pour le cambriolage) alors qu'on peut imaginer que ces jeunes gens sont arrivés, depuis un certain temps déjà, à un niveau convenable de "pensée formelle".

Ceci prouve parfaitement qu'on ne peut utiliser de tels tests pour juger d'une éventuelle maîtrise du concept d'implication, au sens de la logique mathématique.

Roger CUPPENS m'ayant posé la question de l'influence du contenu de la formation supérieure reçue sur le comportement de réponse des individus du niveau IV, j'ai recherché dans mes archives ceux qui avaient précisé la nature de leurs diplômes pour les épreuves 2 (tests C1 et B2) et 7 (tests C2 et B3). Je donne ci-dessous le texte du test B.2, les autres ont été déjà présentés.

Tout Français dont l'année de naissance est 1950 peut voter en 1978.
Tout Français pouvant voter en 1978 pourra se faire élire en 1982.
Jacques est Français et peut voter en 1978.

Cochez la ou les conclusion(s) qui vous semble(nt) juste(s) :

Jacques pourra se faire élire en 1982	<input type="checkbox"/>
Jacques ne pourra pas se faire élire en 1982	<input type="checkbox"/>
On ne peut pas savoir si Jacques pourra se faire élire en 1982	<input type="checkbox"/>
L'année de naissance de Jacques est 1950	<input type="checkbox"/>
L'année de naissance de Jacques n'est pas 1950	<input type="checkbox"/>
On ne peut pas savoir si l'année de naissance de Jacques est 1950	<input type="checkbox"/>

fig. II.19 : test B2 (épreuve 2)
(test construit spécialement pour ma recherche)

En numérotant les réponses possibles de 1 à 6 pour chaque test, les réponses les plus courantes sont : 1-6, réponse dite "correcte" (notée Co) et 1-4, réponse dite "erreur équivalence" (notée Eq); les réponses enregistrées sont données dans le tableau de la figure II.20 ci-après.

Ces exemples montrent à l'évidence que la formation scientifique reçue par la plupart de ces jeunes gens ne leur a pas permis de répondre suivant le modèle attendu par les psychologues; pour répondre à la question de Roger CUPPENS, on peut donc dire que l'origine scolaire des individus de niveau IV n'influence pas totalement le comportement de réponse pour de questions dites de "logique" mais posées en dehors du contexte d'une épreuve de mathématiques, même si parmi ceux qui répondent "correctement" aux deux tests on trouve un D.E.A. de math., un D.E.A. d'informatique, un élève de grande école et un D.U.T..

(NR= non réponse).

EPREUVE 2	C1	B 2	EPREUVE 7	C2	B 3
DUT	Co	Co	BAC B	Eq	Eq
PCEM	Eq	Co	DCEM	NR	Co
DEUG sciences	Eq	Co	BAC D	Eq	Co
BAC G2	Eq	1-5	BAC D+PC1	Eq	Co
BAC C	1-5	Co	PA° + PA ₁	Eq	Eq
BAC C	Eq	Co	DEA informatique	Co	Co
BAC C + PCEM	Eq	NR*	gr. école commerce	Eq	Co
DEA histoire	Eq	Co	BAC C	Eq	Eq
LICENCE math	Eq	Co	BAC D	Eq	Co
AGREGATION	Eq	Co	PCEM	1	Eq
DEA math. (ENS)	Co	Co	PCEM	Eq	Eq
DEUG SSM	Eq	Co	PCEM	Eq	Co
DENTAIRE	3-6	Co	PCEM	Eq	Co
BAC C + DCEM	Eq	Co	BAC C	3-4	Co
DUT gestion	Eq	Co	DEUG histoire	Eq	Co
BAC A	Eq	Co			
DCEM	Eq	Eq			
grande école	Co	Co			

(* verso illisible - défaut de photocopie)

fig.II.20 : Réponses fournies par les 33 candidats
de niveau IV ayant précisé leurs diplômes

II.3.2. L'influence du contexte et du décor dans le comportement de réponse

Dans le comportement de réponses nous avons mis en évidence le caractère fondamental du recours à la connaissance du contexte et la très grande gêne que les candidats ressentaient en l'absence de celui-ci. Les réponses proviennent d'une analyse de la situation "réelle" telle qu'elle est perçue au moment de la passation du test et des compléments d'information que le candidat estime devoir apporter, en particulier dans le cas d'un comportement scolaire tel que décrit précédemment ("quels sont les domaines sur lesquels je suis testé?").

Ainsi, à titre d'exemple, nous pouvons citer:

-> le manteau dans le test sur les cosmonautes (cf. fig. II.21 ci-dessous): certains candidats se sont posé la question de savoir pourquoi, dans un seul des items, on précisait que le cosmonaute américain portait un manteau ?

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris.
Les cosmonautes américains portent tous une chemise bleue.

1) A l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise bleue;
est-il cosmonaute américain ?

OUI NON ON NE PEUT PAS SAVOIR

2) A côté de lui, il y a quelqu'un qui porte une chemise blanche;
est-il cosmonaute américain ?

OUI NON ON NE PEUT PAS SAVOIR

3) Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe;
porte-t-il une chemise bleue ?

OUI NON ON NE PEUT PAS SAVOIR

4) Dans le hall de l'aéroport on voit un cosmonaute américain
en manteau; porte-t-il une chemise bleue ?

OUI NON ON NE PEUT PAS SAVOIR

Figure II.21 : Test L.2

(test "officiel" repris sans modifications)

Ce détail parasite a induit certains candidats à répondre qu'on ne pouvait pas savoir la couleur de sa chemise, certains d'entre eux flairant sans doute un piège du genre: "on précise qu'il porte un manteau, peut-être parce que ce jour là il n'avait pas mis la bonne chemise et qu'il voulait cacher la sienne". On peut y voir une illustration de l'emploi du présent duratif qui accepte la rupture de la règle : les cosmonautes portent **tous et toujours** une chemise bleue mais ceci n'est pas contradictoire avec des situations où l'un d'entre eux, à titre exceptionnel, serait amené à porter une chemise d'une autre couleur...et donc à la cacher, sous un manteau par exemple. Ceci vérifie bien une autre de nos hypothèses :

dans ce type de test il ne s'agit pas d'un raisonnement à partir d'un énoncé mais d'une interprétation de cet énoncé.

Cette analyse est confirmée par l'expérience de l'I.R.E.M. de Grenoble (voir plus loin). Les élèves sont habitués à rencontrer des problèmes "scolaires" c'est-à-dire dans lesquels il y a toutes les informations utiles et seulement celles-là, ils sont donc portés à se demander la raison de détails qui pourraient sembler anodins à un auteur un peu trop imaginaire.

-> le droit de vote : le texte indiquait qu'une personne était née en 1950 et fut posé en 1978; on note que beaucoup de candidats ont donné 18 ans et non 28 ans à ce personnage; ici cette erreur n'avait pas de conséquence sur le comportement de réponse mais on peut penser que la raison de cette mauvaise soustraction n'est pas de l'ordre de l'arithmétique (très simple ici) mais de la recherche "scolaire" du "sur quoi porte le test"; les mathématiques n'étant pas visibles dans la procédure utilisée il ne pouvait s'agir que du droit de vote récemment (à l'époque) passé de 21 ans à 18 ans.

-> l'épreuve des enveloppes cachetées imaginée par JOHNSON-LAIRD vient confirmer cette aspect; les candidats-cobayes s'appuyant sur leur connaissance des habitudes postales n'ont pas eu de mal à répondre "correctement"; en revanche les auteurs n'ont apparemment pas pensé à modifier les conditions de l'expérience de telle façon que, à règle parfaitement identique, les apprentis-postiers aient de fortes chances de se tromper (en introduisant par exemple une enveloppe timbrée à 6d !).

II.3.3. Problèmes logico-linguistiques liés aux quantifications

Trois formes de quantification ont été utilisées :

- des quantifications **explicites** : "tous les...", "chaque fois que..."
- des quantifications **implicites** : "si...(alors)..."
- des quantifications **"fictives"** faisant intervenir des personnages fictifs.

Dans le genre de tests que nous étudions ici, et contrairement aux habitudes mathématiques, les référentiels sont, le plus souvent, sous-entendus ou imprécis et c'est donc au candidat de deviner les limites du problème, ou plutôt, de deviner celles qu'acceptent l'auteur ou le correcteur. Les quantifications peuvent intervenir à plusieurs endroits du texte (énoncé, questions, réponses possibles) et, parfois, avec des sens différents. Si l'on prend, par exemple, le test du cambriolage de l'E.C.D.L.2 (codé C.2, voir page 8), introduit des quantifications sur le temps ("toujours de la même manière") et sur les moyens ("une fausse clef" avec d'ailleurs un "une" existentiel si l'on n'admet pas l'existence d'un passe universel!). Le candidat doit cependant noter que "la maison" de l'énoncé correspond à une

quantification universelle sur les lieux tandis que "la maison" de la question correspond à une maison en particulier, celle qu'il a visitée cette nuit là. Tout ceci, bien entendu, en supposant que l'on entre dans le "jeu" de tels tests et de leur fiction, ce qui peut dépendre de la situation dans laquelle se trouve le testé par rapport à celui qui lui soumet ce test.

Les tests sur le droit de vote posent le problème de définir de manière exhaustive le référentiel sous peine de rendre quasiment illisible le texte (casier judiciaire vierge, inscription sur les listes électorales,...) ...sauf si l'on destine ces questions aux candidats à l'entrée dans une faculté de droit !

La quantification explicite pose, semble-t-il, le moins de problèmes de compréhension, sauf avec des expressions comme "chaque fois que..." ou "toutes les fois que..." (voir plus loin les tests "sans contexte", série J) qui sont associées par certains candidats à des aspects chronologiques.

Avec la quantification implicite portée par le "si...(alors)..." on retrouve des commentaires posant des problèmes de causalité et/ou de chronologie bien connus des linguistes (cf. par exemple <DUC73>).

Il est cependant intéressant de noter la possibilité de compréhension du "un" universel de "si un a est dans X, alors il est dans Y" comme un "un" existentiel conduisant à répondre VRAI dès qu'un tel a, vérifiant X et Y, existe. Cette interprétation peut être comprise comme le remplacement du "si...(alors)..." par le "et", accompagné d'un changement de quantification ("il existe un a qui vérifie X et Y"). Ce comportement a pu être mis en évidence grâce à un testé qui répondit VRAI pour la proposition :

"si un joueur de cette équipe porte la barbe alors il porte des lunettes"
en ajoutant sur sa copie, à côté de la case cochée, "Francis", nom de l'unique joueur fictif supposé être porteur de barbe et de lunettes, alors que deux autres joueurs, tout aussi fictifs, étaient porteurs de barbe mais pas de lunettes (voir ci-après extrait du test F.1 en question).

La quantification fictive, on s'en doute, a plus gêné les candidats faiblement scolarisés et donc peu habitués à ce genre de "jeu" ; ainsi ce commentaire d'un candidat (19 ans, niveau scolaire II) ne répondant pas à un item sur le droit de vote :

"Jacques est à lui seul responsable des ses actes. Voter est un devoir mais quand à (sic) se présenter pour des élections il peut seul résoudre ce problème."

Pierre, Francis, Emmanuel, Alain, Jean et Michel forment une équipe de volley-ball; on connaît sur eux quelques renseignements rassemblés dans le tableau suivant :

Nom	Pierre	Francis	Emmanuel	Alain	Jean	Michel
Cheveux	blonds	bruns	blonds	bruns	roux	châtains
Porte la barbe	oui	oui	non	non	oui	non
Porte des lunettes	non	oui	non	oui	non	non

fig. II. 22 : Extrait du test F.1
(test construit spécialement pour ma recherche)

II.3.3.1. "VRAI", "FAUX"

Pour les mathématiciens les notions de "vrai" et de "faux" restent relatives au cadre, c'est-à-dire à la théorie, dans lequel ils travaillent, sans connotation philosophique ou morale, ces deux mots pouvant être remplacés sans difficulté par "1" et "0", ou par "V" et "F"; pour les enseignants de mathématiques le problème est plus délicat : mettre au même niveau de "vérité" que "toute fonction dérivable sur I est continue sur I" et que "la terre tourne autour du soleil" peut déjà relever de la philosophie; c'est encore plus subtil lorsque les élèves ont tendance à assimiler "vérité" et "exactitude", "justesse" ou "correction", par exemple en donnant le même sens à "falloir" dans "il faut changer le signe de x quand on passe d'un membre d'une équation à l'autre" et dans "il faut encadrer votre résultat". Ainsi "avoir juste" devient-il non pas un jugement sur la qualité scientifique de la production d'un élève mais simplement sur son adéquation à ce qu'attendait l'auteur de la question. Comme je l'ai mentionné pour le test des cartes de WASON, pour beaucoup d'élèves dociles ce qui est encadré (par le "maître") est vrai, on ne le discute pas; mais cette vérité n'est pas d'ordre scientifique, elle fait partie du "jeu" scolaire. Il faut donc manipuler avec précaution des résultats à des tests pour lesquels il est demandé aux candidats de dire si telle proposition est "vraie" ou si telle conclusion est "juste", lorsque la question est plus du type "devinette" que scientifique. C'est le cas de la plupart des tests dits de "logique" où l'on retrouve cette notion de *véracité* des logiciens, mais non explicitée. Je développerai au paragraphe suivant un autre aspect de l'utilisation du "vrai"/"faux" en cas d'absence de variables. (Sur les problèmes linguistiques dans ce type de tests voir aussi <DUM81>).

II.3.3.2. L'absence de variable dans le "si...(alors)..."

Dans le but de nous approcher du type <5>, à savoir d'exercices portant sur une expression "si X alors Y" pour laquelle la véracité de X et celle de Y seraient explicitement données aux candidats, nous avons construit, entre autres, deux tests dont je vais commenter ici les principaux résultats. Les items faisaient intervenir non pas une mais six propositions en "si X alors Y" représentant les quatre cas de la "table de vérité" de l'implication, les cas X="V", Y="F" et X="F", Y="F" étant doublés (pour s'assurer de la cohérence des réponses). Les deux tests ne diffèrent que par le choix laissé aux candidats pour les réponses possibles "VRAI" et "FAUX" pour le premier (codé F.2), "VRAI", "FAUX" et "CA N'A PAS DE SENS" pour le second (codé F.5, donné ci-après).

Pierre, Francis, Emmanuel, Alain, Jean et Michel forment une équipe de volley-ball; on connaît sur eux quelques renseignements rassemblés dans le tableau suivant :

Nom	Pierre	Francis	Emmanuel	Alain	Jean	Michel
Cheveux	blonds	bruns	blonds	bruns	roux	châtains
Porte la barbe	oui	oui	non	non	oui	non
Porte des lunettes	non	oui	non	oui	non	non

En fonction de ces renseignements, indiquez pour chacune des phrases suivantes si elle vous semble vraie ou fausse, en mettant une croix dans la case correspondant à votre choix, à moins que la phrase ne vous semble pas avoir de sens et, dans ce cas, cochez : "ça ne pas de sens".

- 1) Si Pierre est blond alors il porte la barbe
 VRAI FAUX CA N'A PAS DE SENS
- 2) Si Alain ne porte pas la barbe alors il est blond
 VRAI FAUX CA N'A PAS DE SENS
- 3) Si Francis est brun alors il ne porte pas de lunettes
 VRAI FAUX CA N'A PAS DE SENS
- 4) Si Jean est blond alors il porte la barbe
 VRAI FAUX CA N'A PAS DE SENS
- 5) Si Emmanuel porte la barbe alors il porte des lunettes
 VRAI FAUX CA N'A PAS DE SENS

fig. II.23 : Test F.5

(test construit spécialement pour ma recherche)

Les résultats sont éloquentes : aucun candidat, sur 100, n'a "réussi" F.5 et un seul, sur 87, a réussi F.2 (21 ans, titulaire d'un D.E.A.); il s'agit donc bien de tests fort différents des autres puisque même les tests d'après celui des cartes de WASON eurent, en moyenne, 2,5 % de réussites. Pour le test F.2, ne laissant que le choix VRAI/FAUX, la réponse la plus répandue (40%) est "VRAI" pour X="V" et Y="V" et "FAUX" dans tous les autres cas; ce qui correspond à la table de vérité du connecteur *et*, confortant l'idée de Daniel LACOMBE suivant laquelle les candidats, adoptant une réaction de défense en face d'un usage inconnu du "si...(alors)...", seraient conduits à "traduire" ce connecteur en un autre ayant pour eux un sens, à savoir la conjonction. Cette proposition est d'ailleurs faite par l'un des testés (test F.5):

"le rapport entre la couleur des cheveux et le fait de porter ou non la barbe où des lunettes ne peut se faire avec le mot 'alors'...je préférerais 'et' a la place d' 'alors' " (20 ans, CAP tourneur, CAP dessin, bac F1, répond 6 fois "CA N'A PAS DE SENS").

Dans le test F.5 le comportement des candidats est radicalement différent du précédent (F.2) : sur 100 candidats, 6 (des niveaux scolaires I ou II) ont choisi "VRAI" et 5 "FAUX" (comme en F.2) mais 53 ont coché six fois "CA N'A PAS DE SENS" (issus pour la plupart des niveaux scolaires III et IV).

Les commentaires sont nombreux et convergents : les testés sont déroutés, étonnés; ils insistent sur l'absence de lien logique entre la couleur des cheveux et le port de la barbe ou des lunettes. Certains refusent une construction en "si...(alors)..." faisant intervenir des éléments fixés et connus du lecteur qu'ils opposent à un "principe de déduction". Le mot clef n'est pas le "si" mais plutôt le "alors" en raison de la causalité que ces candidats lui associent. Nous sommes ici en présence d'un comportement intéressant d'un point de vue linguistique. Hélas, nous n'avons pas posé de test de ce type dans lequel le mot "alors" aurait été omis; nous ne pouvons donc que laisser ouverte cette question pour l'instant; mais elle mériterait d'être approfondie.

II.3.3.3. "JE NE SAIS PAS", "ON NE PEUT PAS SAVOIR", "JE NE PEUX PAS SAVOIR", "IMPOSSIBLE"

II.3.3.3.1. Présentation du problème

Lors de ma communication au colloque de l'A.R.C. de 1984 (cf. <DUM84b>), j'ai présenté un travail, complémentaire à celui exposé dans ma thèse de 3ème cycle, sur la comparaison des comportements de réponse suivant que parmi les choix de réponse on trouve

"je ne sais pas" ou "on ne peut pas savoir". Je développe et complète ici cette question à partir d'une analyse plus fine récemment effectuée.

D'une manière générale, je constate que :

les candidats choisissent plus facilement l'impersonnel "on ne peut pas savoir" que la formulation "je ne sais pas", la formulation "je ne peux pas savoir" se situant à mi-chemin.

Ceci tient sans doute au fait que, dans ce dernier cas, c'est l'individu qui se met personnellement en cause en reconnaissant son incapacité à tirer une conclusion, même si tout autre individu à sa place était dans l'obligation d'arriver au même résultat. Du point de vue de l'analyse des réponses le "je ne sais pas" peut englober les réponses du type "on ne peut pas savoir" avec des réponses du type : " je ne comprends pas la question et donc je ne sais pas répondre" qui, sans ce choix de réponse, auraient sans doute été des non-réponses.

Il est aussi des situations pour lesquelles il faut laisser au candidat des choix du type "impossible" ou "ça n'a pas de sens"; l'ambiguïté, là encore, ne sera pas exclue. Dans le premier cas il peut s'agir d'une impossibilité mathématique de répondre, parce qu'il manque des informations, on retrouve alors la situation ci-dessus du "on ne peut pas savoir" (que les anglophones proposent avec l'expression "not enough clues"), par exemple dans le cas de la limite d'un rapport de deux fonctions tendant vers zéro, ou bien de l'impossibilité de répondre dans laquelle ce candidat se trouve en raison de l'état de ses connaissances. Dans le deuxième cas la question ou l'énoncé peuvent n'avoir pas de sens en eux-mêmes, ou parce que le contexte est imprécis (sans aller jusqu'à employer, comme O'BRIEN des mots qui n'existent pas !). Il peut aussi s'agir de l'expression personnelle du candidat qui ne veut pas accepter de donner du sens à une question qu'il estime inintéressante. Les commentaires que nous sollicitons des testés, dans l'expérience menée au Centre de Vincennes, mettent d'ailleurs en évidence l'attrait de cette réponse pour de nombreux candidats refusant de jouer le jeu, n'étant pas dans des conditions de contraintes scolaires ou professionnelles. Par exemple, lors du test (codé F.5, vu page 47) sur le port de la barbe et des lunettes, les remarques suivantes ont été fournies :

"J'AI RIEN COMPRIS. PHRASES MAL FORMULEES : ON N'EST PAS BRUN PARCE QU'ON PORTE DES LUNETTES, ON EST BRUN ET ON LES PORTE " (21 ans, niveau scolaire III, coche "ça n'a pas de sens" pour tous les items)

"C'est le rapport de causalité du 'alors' qui rend toutes ces phrases incohérentes; (ainsi, est-ce parce que Pierre est blond qu'il doit nécessairement porter la barbe? " (21 ans, niveau scolaire III, coche "ça n'a pas de sens" pour tous les items)

II.3.3.3.2 Les tests et les épreuves

Comme je l'ai indiqué au début de ce paragraphe, les épreuves 27 et 28 furent construites et passées spécialement, dans le cadre d'un travail complémentaire à ma thèse de 3ème cycle (et ne s'y trouvent donc pas), pour une étude du "JE NE SAIS PAS"/"ON NE PEUT PAS SAVOIR". Le lecteur pourra se reporter à <DUM83> pour y trouver, en particulier, la liste exhaustive des commentaires produits par les testés.

D. LECLERCQ et E. BOXUS ont particulièrement travaillé sur les différences d'utilisation de ces deux choix de réponse. E. BOXUS considère le "ON NE PEUT PAS SAVOIR" comme un "principe de solution générale" dont elle donne des exemples d'effets in <BOX88> (voir aussi sur ce sujet <WOO77>). D. LECLERCQ pense que le "JE NE SAIS PAS" est à rapprocher de la connaissance partielle pour ce qui serait des "lacunes personnelles" du questionné (sur ses recherches concernant l'évaluation de connaissances partielles voir <LEC83>).

Dans tout ce qui suivra JNSP sera synonyme de "JE NE SAIS PAS" et ONPPS le sera de "ON NE PEUT PAS SAVOIR".

Je donne ci-dessous les textes des tests J.2' et B.5 formant l'épreuve 27 et comportant le choix JNSP; les textes J.4 et B.1', formant l'épreuve 28, s'en déduisent, respectivement, par simple remplacement du JNSP par ONPPS; il n'y a pas d'autres différences.

Au sujet du test B.5, Jérôme CHASTENET de GERY remarque que les propositions ne font pas apparaître de "si" et donc une réponse JNSP à un item du type "Jean a pour année de naissance 1950, peut-il voter en 1978?" peut signifier soit "JNSP si Jean a pour année de naissance 1950", soit "JNSP si, Jean ayant pour année de naissance 1950, il peut voter en 1978".

Les tests de la série J se voulaient "sans contexte"; je dois reconnaître que nous y avons introduit, en revanche, d'énormes difficultés d'ordre linguistique qui, maintenant, nous compliquent fortement la tâche quant à l'analyse des comportements de réponse. Je serais tenté de les donner comme exemple de ce qu'il ne faut pas faire...quand on veut poser des questions simples !

Les tests de la série B portaient sur le droit de vote; j'ai choisi pour cette étude celui qui avait fourni les meilleurs résultats lors de la première enquête.

Tout Français dont l'année de naissance est 1950 peut voter en 1978.
Jean, Charles, Pierre et Etienne sont des Français.
Mettez une croix dans la case correspondant à votre réponse.

Jean a pour année de naissance 1950, peut-il voter en 1978 ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

Charles peut voter en 1978, son année de naissance est-elle 1950 ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

Pierre ne peut pas voter en 1978, son année de naissance est-elle 1950 ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

Etienne n'a pas 1950 pour année de naissance, peut-il voter en 1978 ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

fig. II.24 : Test B.5 - Epreuve 27
(test construit spécialement pour ma recherche)

Supposez que vous sachiez que :
Toutes les fois qu'on fait (A), on fait nécessairement (B) aussi.
Alors, est-ce que :

1) Lorsque vous apprenez que quelqu'un a fait (B), vous pouvez être sûr qu'il a fait (A) ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

2) Lorsque vous apprenez que quelqu'un a fait (A), vous pouvez être sûr qu'il a fait (B) ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

3) Lorsque vous apprenez que quelqu'un n'a pas fait (A), vous pouvez être sûr qu'il n'a pas fait (B) ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

4) Lorsque vous apprenez que quelqu'un n'a pas fait (B), vous pouvez être sûr qu'il n'a pas fait (A) ?
OUI NON JE NE SAIS PAS

fig .II.25 : Test J.2' - Epreuve 27
(test construit spécialement pour ma recherche)

II.3.3.3.3 Comparaison des deux sous-populations considérées

Chacune des deux épreuves fut passée par exactement 100 personnes. Les tableaux qui seront donnés dans ce paragraphe feront donc apparaître les résultats numériques exacts mais aussi, ipso facto, les pourcentages. Comme on peut le noter sur les histogrammes ci-après (fig.II.26 et 27), ces deux populations sont assez semblables au niveau scolaire tandis que le

niveau "général" de la population ayant subi l'épreuve 28 fait apparaître un peu plus de résultats faibles (attention aux échelles des deux histogrammes en question). D'ailleurs la moyenne du niveau "général" est de 12,4 pour l'épreuve 27 (écart-type = 5,9) et de 11 pour l'épreuve 28 (écart-type = 6,3). Les figures II.28 et 29 donnent les nuages de points niveau "général"/niveau scolaire et les droites de régression; la corrélation entre ces deux variables est plus forte pour l'épreuve 28 ($r = 0,7$) que pour l'épreuve 27 ($r = 0,5$).

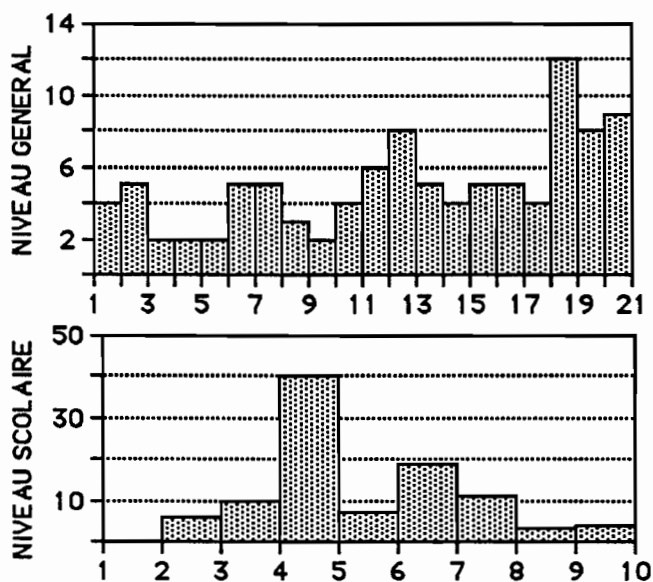


fig.II.26 : Répartition des niveaux scolaire et "général" pour l'épreuve 27

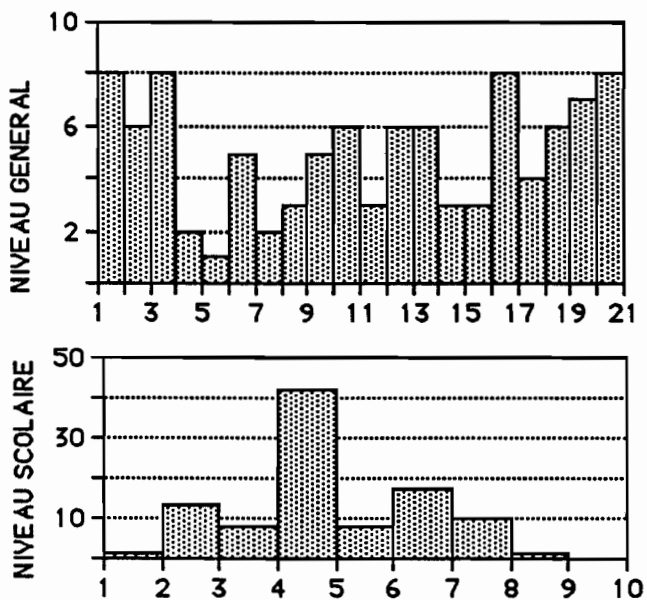


fig.II.27 : Répartition des niveaux scolaire et "général" pour l'épreuve 28

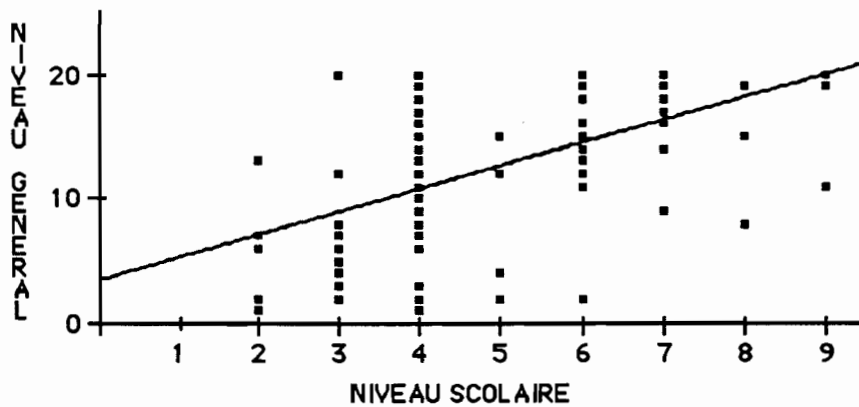


fig.II.28 : Epreuve 27 : nuage de points niveau scolaire/
niveau "général" et droite de régression

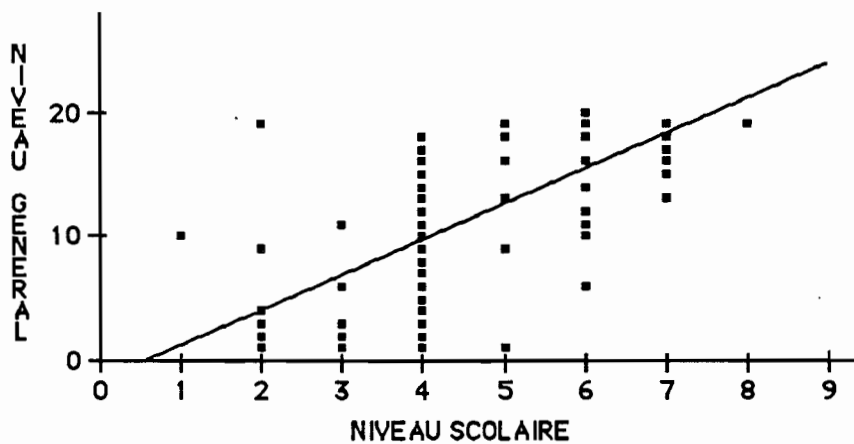


fig.II.29 : Epreuve 28 : nuage de points niveau scolaire/
niveau "général" et droite de régression

II.3.3.3.4 Comparaison des résultats aux deux épreuves

* Première différence : le nombre de fois où les cases JNSP et ONPPS ont été cochées :

- pour JNSP : 117 fois (J.2' : 40 - B.5 : 77)
- pour ONPPS : 247 fois (J.4 : 117 - B.1' : 130)

On constate que ONPPS a été choisi, dans l'ensemble, plus de deux fois plus souvent que JNSP. Le changement est cependant très visible entre la série J, où il y eut près de trois fois plus de ONPPS que de JNSP, et la série B où la proportion est inférieure à deux. Ce résultat prouve sans ambiguïté la différence de comportement de réponse suivant l'un ou l'autre choix proposé.

* seconde différence : le nombre de modèles de réponses différents :

- Epreuve 27 (JNSP) :	Test J.2' : 24	Test B.5 : 23
- Epreuve 28 (ONPPS) :	Test J.4 : 43	Test B.1' : 29

* troisième différence : les non-réponses (complètes) :

Epreuve 27 (JNSP) :	Test J.2' : 5%	Test B.5 : 7%
Epreuve 28 (ONPPS) :	Test J.4 : 7%	Test B.1' : 11%

On peut relier le plus grand nombre de non-réponses pour l'épreuve 28 à la plus grande présence de jeunes ayant eu des résultats faibles aux tests de l'armée dans la population testée, comme il a été mentionné précédemment. En effet parmi les sept abstentions à J.4, cinq ont eu moins de 10 en niveau "général" (plus précisément ils ont eu 1 ou 2), et pour B.1', sept sur les onze sont issus de la même catégorie. Sur les cinq testés s'étant abstenus à cette épreuve quatre ont eu 1 ou 2 aux tests de l'armée et un a eu 12.

* cinquième différence : les réussites :

Les tests B.1' et B.5 reposent sur la même structure "logique": à partir d'un énoncé correspondant ("théoriquement") à une implication du type "pour tout x de A, si P(x) alors Q(x)" quatre questions sont posées :

- item n°1 : $P(x_1)$ vrai, est-ce que $Q(x_1)$ vrai ?
- item n°2 : $Q(x_2)$ vrai, est-ce que $P(x_2)$ vrai ?
- item n°3 : $Q(x_3)$ faux, est-ce que $P(x_3)$ vrai ?
- item n°4 : $P(x_4)$ faux, est-ce que $Q(x_4)$ vrai ?

Suivant les règles de la logique mathématique, on est amené à appeler "bonnes réponses" les suivantes :

- item n° 1 : OUI
- item n°2 : JNSP ou ONPPS
- item n°3 : NON
- item n°4 : JNSP ou ONPPS.

Pour les tests B.1' et B.5 nous avons :

P(x) : x a pour année de naissance 1950

Q(x) : x a le droit de voter en 1978.

Les tests de la série J, comme en particulier J.2' et J.4, avaient été construits pour ne pas faire intervenir de contextes particuliers, contrairement à ceux parlant de droit de vote, de cambrioleurs ou d'équipe sportive. En fait ces tests "sans contexte" comportent des difficultés linguistiques que le lecteur repèrera dès la première lecture, comme par exemple deux négations à l'item n°4. Mais, en plus, ils posent un problème supplémentaire d'interprétation en raison de la formulation : "Pouvez-vous être sûr que..." qui -"logiquement"- ne devait conduire qu'à un choix de réponse entre "OUI" et "NON". Contrairement aux tests B.1' et B.5 où le troisième choix était nécessaire pour deux des quatre items, ici le choix ONPPS / JNSP jouait uniquement un (très fort) rôle de distracteur. Comment dès lors interpréter une réponse de ce type à la question "pouvez-vous être sûr que..." ? qui est, en fait, une question à deux niveaux. Est-ce : "on ne peut pas savoir si je peux être sûr que..." ? ou bien encore: "je ne sais pas si je peux être sûr que..."? Il faut, sans doute, plutôt y voir quelque chose comme: "on ne peut savoir quelle est la question", ou bien : "je ne sais pas ce que vous voulez que je réponde".

Je reconnais, a posteriori, que notre texte "sans contexte" n'était ni une réussite, ni un modèle et qu'il n'est pas facile d'interpréter les divers comportements de réponse enregistrés. Il eut été suffisant de formuler nos items comme suit : "Quelqu'un a fait (B); a-t-il fait (A) ? "On retrouverait ainsi les problèmes éventuels liés à l'absence du "si", ceux relatifs à l'introduction du temps (simultanéité dans le passé), mais nous n'aurions pas ce double niveau lié au "pouvez-vous être sûr...".

Voici ce que nous avons décidé de nommer "bonnes" réponses :

ITEM N°	QUESTION	"BONNE" REponse
1	Q vrai; pouvez-vous être sûr de P ?	NON
2	P vrai; pouvez-vous être sûr de Q ?	OUI
3	P faux; pouvez-vous être sûr de non-Q ?	NON
4	Q faux; pouvez-vous être sûr de non-P ?	OUI

fig.II.30 : Réponses comptées comme "bonnes" aux tests J.2' et J.4
où P signifie "on fait A" et Q signifie "on fait B"

Comme je l'ai montré précédemment, les testés furent peu enclins à choisir JNSP, les taux de "réussites" diminuent donc ou augmentent suivant que les "bonnes" réponses nécessitaient ou non le choix de cette case. Voici, pour des bâtisseurs de tests, un bon moyen d'obtenir de bons scores ou au contraire de sélectionner durement, il leur suffit d'user judicieusement du JNSP ou du ONPPS.

II.3.3.3.5 Réussites aux tests sur le droit de vote

(100 testés à chaque épreuve) :

Epreuve 27 (B.5 avec JNSP) : 17

Epreuve 28 (B.1' avec ONPPS) : 34

Cette différence est d'autant plus remarquable que, comme noté précédemment, la population de l'épreuve 27 obtint de meilleurs résultats aux tests de l'armée que celle de l'épreuve 2.

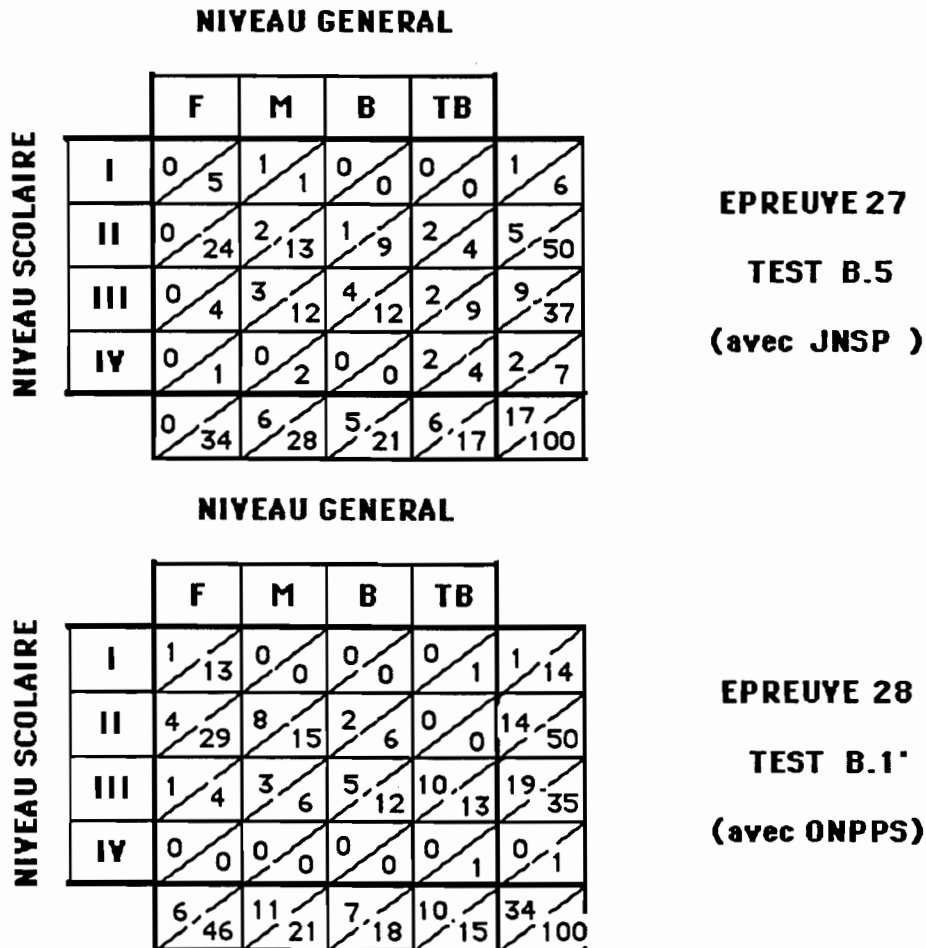


fig.II.31 : Répartition des "bonnes" réponses aux tests sur le droit de vote en fonction des niveaux scolaire et "général"

Le changement de formulation profite, comme le montrent les tableaux de la figure II.31 ci-dessus, au niveau scolaire III (double) et surtout au niveau scolaire II (triple). Le tableau de la figure II.32 ci-après met clairement en évidence le transfert de la différence entre les réponses JNSP et les ONPPS, à peu près à parts égales, entre les "OUI" et les "NON". Ainsi, par exemple, à l'item n°2, la différence de 30 entre les 61 "ONPPS" et les 31 "JNSP" se répartit comme suit :

17 pour les "OUI" et 18 pour les "NON".

I T E M	REPONSE					
	OUI		NON		ONPPS	JNSP
	B.1'	B.5	B.1'	B.5	B.1'	B.5
1	80	87	2	3	5	3
2	23	40	2	20	61	31
3	5	7	59	73	22	11
4	5	17	18	35	64	38

fig.II.32 : Répartition des réponses aux tests sur le droit de vote
(les "bonnes" réponses sont encadrées)

II.3.3.3.6 Réussites aux tests "sans contexte"

Pour les tests "sans contexte" ce sont le niveau scolaire III (niveau baccalauréat) et les hauts niveaux "généraux" qui progressent (cf. fig.II.33). Pour les raisons indiquées précédemment on remarquera que le meilleur score est ici obtenu à l'épreuve 27, contrairement aux tests sur le droit de vote. Le tableau de la figure II.34 montre que les transferts, lors du passage de ONPPS à JNSP, se font quasiment tous vers la réponse "NON" pour les tests "sans contexte".

NIVEAU GENERAL

		F	M	B	TB	
NIVEAU SCOLAIRE	I	0 / 5	0 / 1	0 / 0	0 / 0	0 / 6
	II	2 / 24	2 / 13	1 / 9	1 / 4	6 / 50
	III	1 / 4	5 / 12	7 / 12	4 / 9	17 / 37
	IV	0 / 1	0 / 2	0 / 0	1 / 4	1 / 7
		3 / 34	7 / 28	8 / 21	6 / 17	24 / 100

EPREUVE 27
TEST J. 2'
(avec JNSP)

NIVEAU GENERAL

		F	M	B	TB	
NIVEAU SCOLAIRE	I	0 / 13	0 / 0	0 / 0	0 / 1	0 / 14
	II	0 / 29	1 / 15	0 / 6	0 / 0	1 / 50
	III	0 / 4	0 / 6	3 / 12	2 / 13	5 / 35
	IV	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 1	0 / 1
		0 / 46	1 / 21	3 / 18	2 / 15	6 / 100

EPREUVE 28
TEST J.4
(avec ONPPS)

fig.II.33 : Répartition des "bonnes" réponses aux tests "sans contexte" en fonction des niveaux scolaire et "général"

I T E M	REPONSE					
	OUI		NON		ONPPS	JNSP
	J.4	J.2'	J.4	J.2'	J.4	J.2'
1	36	38	20	48	33	9
2	54	64	21	21	17	9
3	33	35	23	47	33	12
4	44	57	18	28	29	10

fig.II.34 : Répartition des réponses aux tests sans contexte
(les "bonnes" réponses sont encadrées)

II.3.3.3.7 Les différents types de réponse

J'ai fait remarquer précédemment que leurs nombres étaient différents d'un test à l'autre; je voudrais analyser de plus près ceux qui ont été fournis par une quantité importante de testés.

II.3.3.3.7.1 Epreuve 27 - Test J.2'

La réponse NON/OUI/NON/OUI, "bonne" réponse, a été fournie, comme on l'a vu, par 24 individus; les autres types de réponses sont :

-> la réponse 4 fois OUI a été donnée 18 fois; elle peut être considérée comme correspondant à la fameuse confusion entre "implication" et "équivalence";

-> la réponse 4 fois JNSP a été donnée 8 fois (dont 7 fois au niveau "général" F) c'est-à-dire que même le modus ponens n'est pas réussi; on peut interpréter cette réponse comme correspondant à une incompréhension totale du problème;

-> la réponse 4 fois NON a été donnée 6 fois (dont 4 fois au niveau "général" F) exprime certainement le choix des dubitatifs qui devant le manque de clarté du texte préfèrent répondre NON lorsqu'on leur demande s'ils sont sûrs de quelque chose;

-> la réponse OUI/NON/NON/NON s'explique sans doute en partie par le problème de la double négation du quatrième item (déjà signalé) : sur les 6 individus concernés 4 sont de niveau "général" TB.

II.3.3.3.7.2 Epreuve 27 - Test B.5

En dehors des 17 "bonnes" réponses OUI/JNSP/NON/JNSP déjà signalées, on peut noter :

-> 26 réponses OUI/OUI/NON/NON, correspondant au refus du JNSP, rentrent dans l'interprétation classique de l'"équivalence" et se répartissent à peu près proportionnellement entre les différents niveaux scolaires et "généraux";

-> 9 réponses OUI/NON/NON/OUI sont plus difficilement explicables : si le NON au second item peut se comprendre comme un palliatif devant le refus du JNSP, comment comprendre le OUI du quatrième item ? 5 d'entre eux viennent du niveau "général" bon et les 9 sont des niveaux scolaires II et III;

-> 5 réponses OUI/NON/NON/JNSP s'expliquent tout aussi difficilement: pourquoi accepter de cocher la case JNSP au quatrième item et pas au second ? Ces testés ne se laissent cependant pas tenter par l'"équivalence"; ils sont tous de niveau scolaire III ou IV mais se répartissent entre les niveaux "généraux" moyen et très bon.

II.3.3.3.7.3 Epreuve 28 - Test J.4

Les réponses non classées comme acceptables se répartissent en 3 types principaux :

-> 11 pour 4 fois OUI : ceci pourrait être assimilé à l'erreur "équivalence"; la moitié de ces personnes a un niveau "général" moyen (alors que la population de référence ne représente que le cinquième du total); aucun testé de niveau scolaire (sur 14) ne choisit cette réponse;

-> 9 personnes ont répondu 4 fois ONPPS, exprimant sans doute leur incompréhension du problème (4 fois JNSP en J.2'); toutes sont de niveau scolaire II et de niveau "général" faible;

-> 6 testés ont choisi la réponse ONPPS/OUI/ONPPS/ONPPS en ne s'éloignant d'une "bonne" réponse qu'à cause du 4ème item, peut-être pour des raisons de difficulté de compréhension des deux négations; tous les niveaux "généraux" sont touchés et seul le niveau scolaire I est épargné.

II.3.3.3.7.4 Epreuve 28 - Test B.1'

En dehors des 34 "bonnes" réponses seules les 9 réponses OUI/OUI/NON/NON retiennent l'attention; elles correspondent à la réponse du type "équivalence" déjà mentionnée; la répartition est presque proportionnelle pour le niveau "général"; en revanche aucun des 14 testés de niveau scolaire I ne fit cette erreur tandis qu'elle inspira l'unique testé de niveau IV et 10% des niveaux II et III.

II.3.3.3.8 Comportements associés à l'intérieur d'une même épreuve

Si l'on devait estimer que les deux tests de chacune des épreuves considérées sont de même "nature" logique et intellectuelle on s'attendrait à avoir des comportements de réponse identiques à ces deux tests. Les résultats ont été les suivants :

		réussite puriste	4 fois OUI	4 fois JNSP	4 fois NON	NON/OUI/NON/NON	autres	non-réponse	
T E S T B.5		9	2	0	0	2	4	0	réussite
		5	10	0	1	0	10	0	OUI/OUI/NON/NON
		1	3	1	0	2	2	0	OUI/NON/NON/OUI
		1	0	0	0	0	4	0	OUI/NON/NON/JNSP
		0	0	1	0	0	0	0	4 fois OUI
		8	3	5	4	2	11	2	autres
		0	0	1	1	0	2	3	non-réponse

TEST J.2'

fig.II.35 : Epreuve 27 : répartition comparée des différents types de réponse

		réussite puriste	ONPPS/OUI ONPPS/OUI	4 fois OUI	4 fois ONPPS	ONPPS/OUI ONPPS/ONPPS	autres	non-réponse	
T E S T B.1'		2	4	5	2	4	17	0	réussite
		1	0	1	2	1	4	0	OUI/OUI/NON/NON
		0	0	1	1	0	1	0	4 fois OUI
		2	1	4	4	1	29	2	autres
		1	1	0	0	0	4	5	non-réponse

TEST J.4

fig.II.36 : Epreuve 28 : répartition comparée des différents types de réponse

J'ai souligné les cases pouvant correspondre à des comportements de réponse identiques d'un test à l'autre; mise à part l'intersection "autres/autres" qui ne présente pas d'intérêt puisque nous ne pouvons pas l'interpréter, on constate peu d'inclusions importantes, même au niveau des réussites puisque, à l'épreuve 27, seuls 9 testés ont "réussi" à la fois J.2' et B.5 tandis que, à l'épreuve 28, il n'y eut que 6 "réussites" à J.4 et à B.1'. On peut cependant remarquer que 10 testés de l'épreuve 27 ont eu un comportement de type "confusion implication/équivalence" à la fois pour J.2' et B.5 (un seul à l'épreuve 28).

N.B. : Pour compléter cette comparaison, je présente, plus loin, les résultats d'une analyse factorielle effectuée sur ces mêmes données.

II.3.3.3.9 Cas particulier : "JE NE PEUX PAS SAVOIR"

Dans ma thèse de 3ème cycle, j'ai comparé deux épreuves portant sur le droit de vote et le cambriolage, l'épreuve 2, comportant les tests C.1 et B.2 (respectivement présentés aux pages II.3 et II.34) et l'épreuve 7, constituée par les tests C.2 (version identique à C.1 mais cases à cocher au lieu de souligner une phrase) et B.3 (texte ci-dessous fig. II.37).

Jacques est français et a un casier judiciaire vierge.	
On sait que :	
Si Jacques a pour année de naissance 1950 alors il a le droit de voter en 1979.	
Si Jacques a le droit de voter en 1979 alors il a le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire.	
On sait de plus que Jacques a le droit de voter en 1979.	
Cochez la ou les conclusion(s) qui vous semble(nt) juste(s) :	
Jacques a le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire	<input type="checkbox"/>
Jacques n'a pas le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire	<input type="checkbox"/>
Je ne peux pas savoir si Jacques a le droit de se présenter à l'examen du permis de conduire	<input type="checkbox"/>
Jacques a pour année de naissance 1950	<input type="checkbox"/>
Jacques n'a pas 1950 pour année de naissance	<input type="checkbox"/>
Je ne peux pas savoir si Jacques a pour année de naissance 1950	<input type="checkbox"/>

fig.II.37 : Test B.3 (épreuve n° 7)
(test construit spécialement pour ma recherche)

A la page 33 de ma thèse je notais alors : "les tests C.1 et C.2 sont comparables tandis que B.3 se différencie de B.2 par le grand nombre de réponses du type "1.4" ". Cette réponse, que j'appelle, pour reprendre la tradition dans ce domaine, erreur de type "équivalence", consiste, à partir de l'énoncé : $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ et Q , à dire que R est vrai (application correcte du modus ponens) mais aussi que P est vrai (application de la "fausse réciproque"); ceci se concrétise, dans les tests formulés comme B.3 par exemple, par le choix des cases 1 et 4 (et donc réponse dite de type "1-4"), tandis que la "bonne" réponse est de cocher les cases 1 et 6 (et donc réponse de type "1-6").

De fait les résultats furent :

Réussites (réponse 1-6)

C.1 : 11% B.2 : 34%
 C.2 : 10% B.3 : 30%

Erreur type "équivalence" (réponse 1-4)

C.1 : 58% B.2. : 18%
 C.2 : 50% B.3 : 44%

	C.1 ONPPS	C.2 ONPPS	B.2 ONPPS	B.3 JNPPS
R	81	72	70	85
-R	1	3	3	3
? R	20	14	20	5
P	66	59	25	49
-P	3	4	5	3
? P	26	23	52	34

fig.II.38 : Pourcentages du nombre de réponses choisies

Nous avons donc encore ici la manifestation d'un phénomène analogue à celui repéré avec le JNSP : c'est la personnalisation de la réponse, avec un "JE", qui freine les testés dans ce choix. Or pour répondre correctement (réponses encadrées sur la figure ci-dessus) il fallait choisir JNPPS pour la véracité de P. On voit clairement sur le tableau de la figure II.38 ci-dessus que le rôle dissuasif du "JE" conduit plus de testés vers le "bon" choix (passage de 70% à 85%) pour **R** (application du modus ponens), mais que cette différence de 15% est presque exactement compensée par le plus grand nombre d'erreurs pour **? P** (passage de 20% à 5%) (application de la "fausse réciproque"). L'effet est quasiment identique, sauf qu'ici c'est le ONPPS/JNPPS qui est considéré comme étant la "bonne" réponse. On vérifie,

une fois, encore, qu'en choisissant bien les formulations on peut, au choix du testeur, augmenter ou diminuer sensiblement le taux de "réussite" à de tels tests.

II.4 Exemple de résultats pouvant être obtenus avec une analyse factorielle

Je présente ici, à titre d'exemple, quelques résultats obtenus à partir d'une analyse factorielle menée sur les populations ayant subi les épreuves 2, 27 et 28. Les réponses à chaque item, ainsi que les réponses aux avis demandés sur la difficulté et l'intérêt des tests, ont été croisées avec les variables suivantes :

- département d'origine : Paris, banlieue, province,
- âge : ≤ 18 ans, 19-20 ans, 21 et plus,
- niveau "général" (4 niveaux, voir page II.20),
- niveau scolaire (4 niveaux, voir page II.20).

Les types ("modèles") de réponse principaux ont été "projetés" comme variables supplémentaires pour les situer dans le nuage de points.

II.4.1 Epreuves 27 et 28

Je présente en même temps ces deux études afin de compléter ce que j'ai commencé, avec des résultats statistiques classiques, dans le paragraphe sur la comparaison entre "JE NE SAIS PAS" (épreuve 27) et "ON NE PEUT PAS SAVOIR" (épreuve 28). On note immédiatement une différence importante des comportements de réponse des deux populations puisque, pour ce qui est des axes d'inertie on obtient :

- pour l'épreuve 27 : un seul axe important avec 68% d'inertie, le suivant n'en ayant plus que 8%,
- pour l'épreuve 28 : trois axes ayant, dans l'ordre, 47%, 18% et 15% d'inertie, le suivant étant à 8%.

La représentation graphique pour le nuage associé à l'épreuve 27 (avec JNSP) est donnée à la figure II.39, et à la figure II.40 pour l'épreuve 28 (ONPPS); le premier axe est horizontal, le second vertical.

Pour plus de précision, et pour mieux "lire" ce graphique (et ceux qui suivront), je donne ci-dessous les éléments principaux de cette analyse factorielle. Le code est celui utilisé pour

matérialiser les points sur le graphique; J correspond aux tests "sans contexte" et B aux tests sur le droit de vote.

"représ." indique le pourcentage de réponse de ce type (par rapport aux différents choix possibles à l'item correspondant) ou bien le pourcentage d'une sous-population par rapport à la population totale (pour les variables et les "modèles" de réponse).

"contrib." indique la contribution de cette réponse ou de cette variable dans la définition de l'axe considéré; le classement est fait ici par ordre décroissant des contributions; j'indique pour chaque tableau la contribution moyenne pour pouvoir juger de l'écart entre celle-ci et les contributions retenues.

"abs." est égal à l'abscisse du point correspondant sur l'axe considéré.

Le premier axe est défini principalement par :

les réponses (contribution moyenne : 22) :

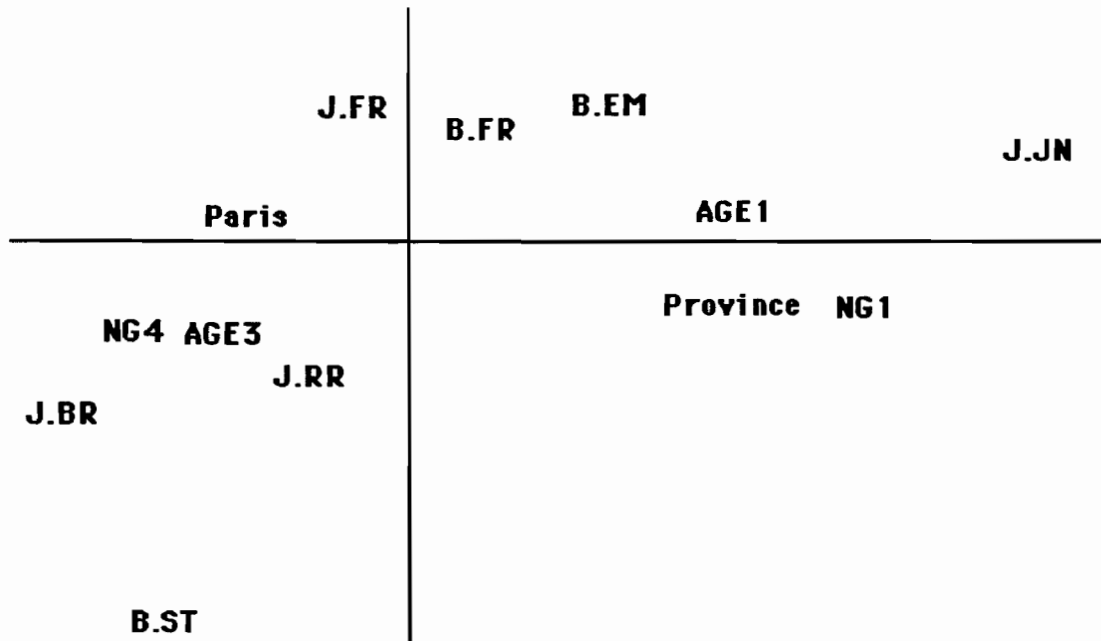
code	signification	représ.	contri.	abs.
B.ST	test B.5 jugé "stupide"	7%	137	-505
J.FR	fausse réciproque	38%	119	+202
J.RR	résistance à la fausse réciproque	48%	84	-151
B.FR	fausse réciproque	41%	81	+161
B.EM	erreur au modus ponens	8%	54	+203

les variables (contribution moyenne : 71) :

NG1	niveau "général" faible	34%	253	+521
Prov.	province	27%	136	+804
Age 1	29%	115	+803	
Age 3	41%	107	-309	
NG4	niveau "général" très bon	17%	77	-407
Paris	42%	69	-246	

les modèles de réponse sont projetés comme suit :

J.JN	4 fois JNSP (test J.2')	8%	76	+999
J.BR	bonne réponse (test J.2')	24%	65	-534



LEGENDE

- B.ST** test B.5 jugé "stupide"
- J.FR** fausse réciproque
- J.RR** résistance à la fausse réciproque
- B.FR** fausse réciproque
- B.EM** erreur au modus ponens
- J.JN** 4 fois JNSP (test J.2')
- J.BR** bonne réponse (test J.2')

fig. II.39 : épreuve 27 . Axes 1 et 2

A part la contribution surprenante (et unique dans les trois études faites ici) du choix "stupide" dans les commentaires, on peut remarquer que le premier axe sépare deux populations et ce très nettement : d'un côté, celui de la résistance à la fausse réciproque (sachant $P \Rightarrow Q$ et Q ne pas déduire P), Paris, le très bon résultat aux tests de l'armée, les plus âgés et la bonne réponse au test difficile, le test "sans contexte"; de l'autre côté, celui des fausses réciproques aux deux tests et de l'erreur au modus ponens, la province, le résultat faible aux tests de l'armée, les plus jeunes, et comme façon de répondre : "JE NE SAIS PAS" à toutes les questions. La présence du JNSP semble donc avoir "durci" les positions sur un

seul axe, éloignant les unes des autres deux populations semblant cumuler les avantages ou les désavantages, comme dans une caricature où l'on aurait forcé le trait. Curieusement, le JNSP a un effet différent d'un test à l'autre : c'est surtout le test "sans contexte" qui "pèse" lourd; le test sur le droit de vote n'intervenant que pour mettre en lumière ceux qui ne réussissent pas au modus ponens ou qui utilisent la fausse réciproque.

Ces résultats peuvent sans doute apporter un élément de réponse à la question que pose Josette ADDA de savoir si, pour réussir ce genre de test, il vaut mieux savoir faire les tests comme ceux de l'armée ou avoir des connaissances scolaires (éventuellement des connaissances sur l'implication); ici le niveau scolaire n'apparaît pas comme élément "de poids" sur l'axe des réussites. Dieudonné LECLERCQ, pour sa part, situe plutôt cette question dans le cadre du *test wiseness*, que De LANDSHEERE définit comme la "qualité de celui qui est aguerri aux tests" (in <DEL79>), cadre dans lequel il place aussi le comportement du QCMiste dont l'interview est présentée au chapitre V (sur ce sujet du *test wiseness* voir <LEC86> pp. 108-109).

Pour l'épreuve 28 (ONPPS), les résultats sont, avec les mêmes conventions que pour l'épreuve 27 :

- premier axe :

les réponses (contribution moyenne : 22) :

code	signification	représ.	contri.	abs.
J.RM	réussite au modus ponens (test J.4)	54%	73	-271
B.RN	résistance fausse négation (test B.1')	56%	73	-265
J.EM	erreur dans le modus ponens (test J.4)	19%	59	+408
B.RR	résistance fausse réciproque (test B.1')	52%	49	-225
J.RC	contraposée exacte (test J.4)	44%	48	-242
B.EN	fausse négation (test B.1')	7%	45	+589
B.RC	contraposée exacte (test B.1')	60%	43	-196

les variables (contribution moyenne : 77) :

NG1	niveau "général" faible	46%	222	+300
NSC3	niveau scolaire III	35%	161	-292
NSC1	niveau scolaire I	14%	147	+439
Age 3	38%	107	-229	

les modèles de réponse :

B.BR	"bonne" réponse (test B.1')	34%	115	-427
J.X	ONPPS/OUI/ONPPS/OUI (test J.4)	6%	89	-896
J.BR	"bonne" réponse (test J.4)	6%	76	-823
B.HM	ensemble des rép. "hors modèles" (B.1')	43%	69	+294
J.ON	4 fois ONPPS (test J.4)	9%	54	+566

- deuxième axe :

les réponses (contribution moyenne : 22) :

code	signification	représ.	contri.	abs.
J.N1	non réponse au 1er item (test J.4)	10%	102	+462
J.N3	non réponse au 3ème item (test J.4)	11%	85	+402
J.N2	non réponse au 2ème item (test J.4)	7%	53	+396

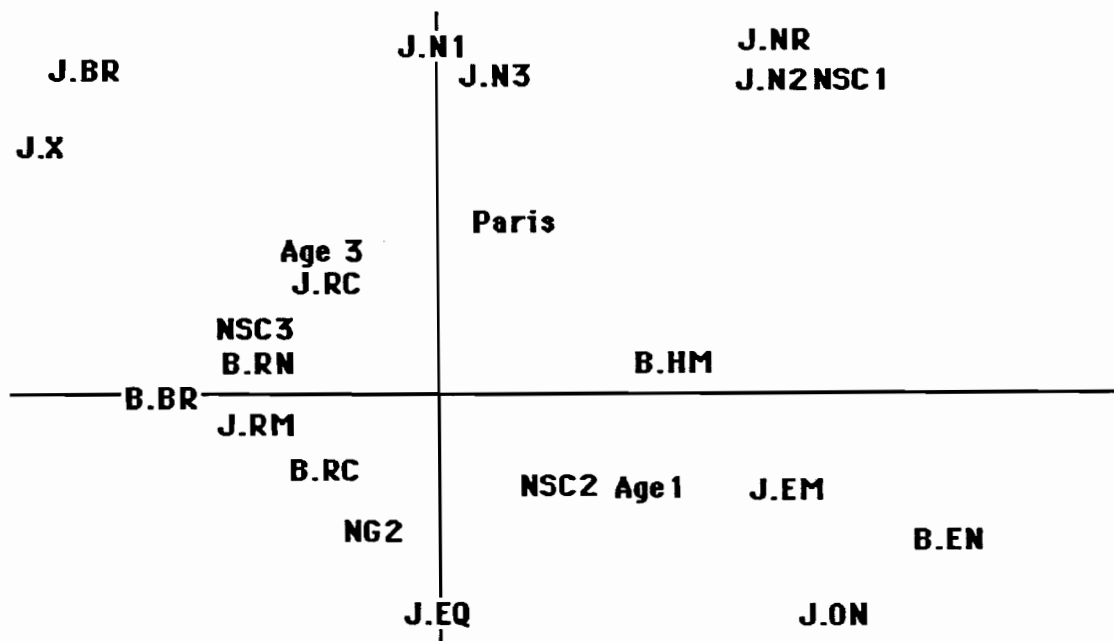
les variables (contribution moyenne : 77) :

NSC1	niveau scolaire I	14%	324	+407
Paris	45%	148	+154	
NSC2	niveau scolaire 2	50%	138	-142
NG2	niveau "général" moyen	21%	83	-170
Age 1	32%	80	-135	

les modèles de réponse

J.EQ	erreur type "équivalence" (test J.4)	11%	83	-398
J.ON	4 fois ONPPS (test J.4)	9%	64	-387
J.NR	non réponse (test J.4)	7%	53	+396
J.BR	"bonne" réponse (test J.4)	6%	53	+172

Au vu de ces résultats, on peut noter que les résultats à ce test n'ont pas conduit à des clivages aussi nets que dans le cas de l'épreuve 27.



LEGENDE

- J.RM** réussite au modus ponens (test J.4)
- B.RN** résistance fausse négation (test B.1')
- J.EM** erreur dans le modus ponens (test J.4)
- B.RR** résistance fausse réciproque (test B.1')
- J.RC** contraposée exacte (test J.4)
- B.EN** fausse négation (test B.1')
- B.RC** contraposée exacte (test B.1')
- B.BR** "bonne" réponse (test B.1')
- J.X** ONPPS/OUI/ONPPS/OUI (test J.4)
- J.BR** "bonne" réponse (test J.4)
- B.HM** ensemble des rép. "hors modèles" (B.1')
- J.ON** 4 fois ONPPS (test J.4)
- J.N1** non réponse au 1er item (test J.4)
- J.N3** non réponse au 3ème item (test J.4)
- J.N2** non réponse au 2ème item (test J.4)
- J.EQ** erreur type "équivalence" (test J.4)
- J.NR** non réponse (test J.4)

fig. II.40 : épreuve 28 . Axes 1 et 2

Quelques points remarquables pour le premier axe :

- les tests J.4 et B.1' interviennent tous les deux pour cet axe, en particulier la réussite complète à l'un ou l'autre test dans les modèles de réponse, avec même une contribution plus forte du droit de vote,

- les niveaux scolaires I et III sont opposés sur ce premier axe, et de même pour les bons résultats aux tests de l'armée s'opposant aux individus âgés,

- l'axe est nettement bien défini par, d'un côté, les erreurs (au modus ponens pour J.4 et la fausse négation pour B.1'), et de l'autre côté, les bonnes réponses (au modus ponens et à la contraposée pour J.4, à la contraposée et à la résistance à la fausse négation et à la fausse réciproque pour B.1').

Curieusement, le deuxième axe est exclusivement marqué par le test J.4, "sans contexte", et plus particulièrement par l'abstention à certains de ses items.

II.4.2 Epreuve 2 (tests C.1 et B.2) (voir figure II.41)

Trois axes principaux apparaissent, d'importances très différentes : 60%, 18% et 11%, le suivant n'étant qu'à 5%.

- premier axe :

les réponses (contribution moyenne : 42) :

code	signification	représ.	contri.	abs.
C.EM	erreur pour le modus ponens (test C.1)	19%	159	+546
B.XO	pas choisi le ONPPS au 6ème item (B.2)	48%	135	+311
B.6O	choix du ONPPS au 6ème item (test B.2)	50%	127	-293
B.EM	erreur pour le modus ponens (test B.2)	30%	105	+350

les variables (contribution moyenne : 72) :

NG1	niveau "général" faible	32%	267	+307
Age 1		28%	185	+273
NG4	niveau "général" très bon	31%	154	-236

les modèles de réponse

B.BR	"bonne" réponse (test B.2)	37%	261	-495
C.HM	ensemble des rép. "hors modèles" (C.1)	20%	174	+542
B.HM	idem (test B.2)	19%	113	+460
C.BR	"bonne" réponse (test C.1)	10%	79	-516

- deuxième axe :

les réponses (contribution moyenne : 42) :

code	signification	représ.	contri.	abs.
B.FR	fausse réciproque (test B.2)	25%	149	-251
C.RR	résistance fausse réciproque (C.1)	32%	154	+225
C.6O	choix du ONPPS au 6ème item (C.1)	27%	87	+185
C.3O	choix du ONPPS au 3ème item (C.1)	20%	79	+200
C.EM	erreur au modus ponens (test C.1)	19%	79	+200

les variables (contribution moyenne : 72) :

NG3	niveau "général" bon	19%	231	-203
NSC2	niveau scolaire II	49%	193	-116
NG2	niveau "général" moyen	15%	147	+182

les modèles de réponse

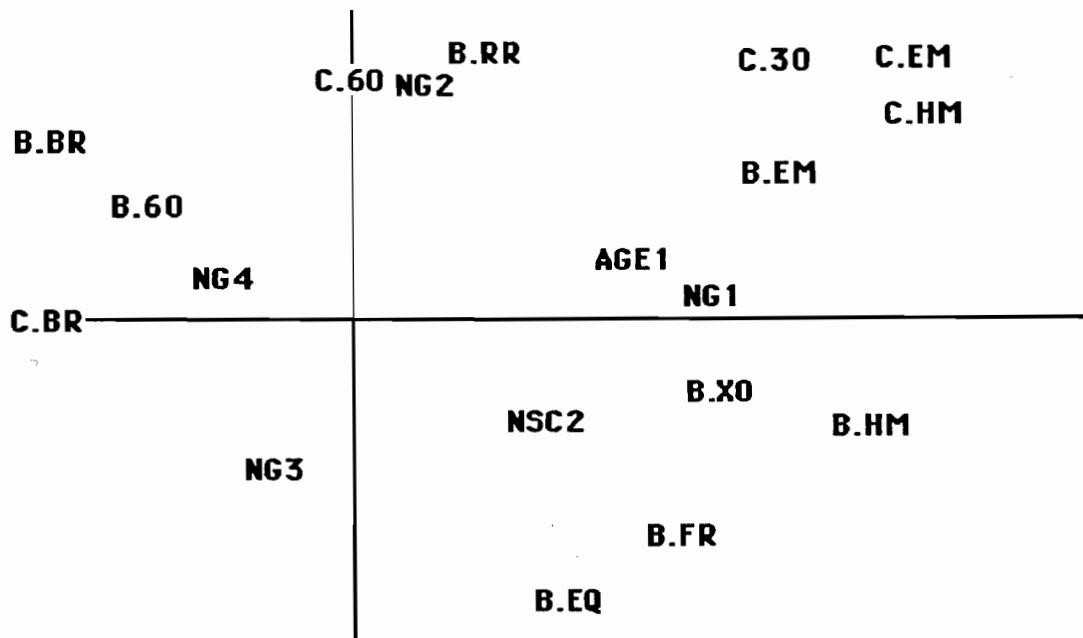
B.EQ	erreur type "équivalence" (test B.2)	19%	150	+160
B.BR	"bonne" réponse (test B.2)	37%	90	-291

De ces résultats on peut observer que :

- le premier axe oppose très nettement les modèles "bonne" réponse à l'ensemble des réponses "hors modèles", pour les deux tests,
- il oppose aussi les deux extrêmes du niveau "général", les très bons aux tests de l'armée se retrouvant proches des "bonnes" réponses (ce qui conforte l'idée, déjà avancée, du lien entre réussite à nos tests et réussite à ceux de l'armée); le niveau scolaire n'apparaît pas comme élément important de cet axe,
- le deuxième axe ne fait intervenir que les modèles "classiques" de réponse ("bonne" réponse / réponse de type "équivalence") et uniquement pour le test sur le droit de vote (B.2),
- l'origine géographique n'apparaît pas comme importante sur ces deux axes,
- les différentes erreurs au modus ponens, pour chacun des tests, interviennent avec des contributions importantes, même pour le deuxième axe; ceci conforte mon idée qu'il y a là contradiction avec ce qui est supposé dans la "théorie" du développement intellectuel par "stades", à savoir que le modus ponens est une règle d'inférence simple.

Les nouveaux résultats statistiques présentés dans ce sous-chapitre ont été obtenus, d'une part avec le logiciel américain SASTM et le logiciel français ADDADTM et, d'autre part, avec le logiciel StatWorksTM sur MacIntoshTM. Pour les premiers, ce travail a été mené avec la collaboration de Madame Danielle TRANCART, statisticienne au Centre Informatique Recherche de l'I.N.R.P., qui a construit la grille de saisie, effectué les traitements souhaités et m'a conseillé pour l'interprétation des résultats, et avec l'aide de Madame Martine BACHELOT, secrétaire de direction à DP5, qui a assuré la saisie des documents.

Qu'il me soit permis ici de leur redire mes chaleureux remerciements.



LEGENDE

- C.EM erreur pour le modus ponens (test C.1)
- B.XO pas choisi le ONPPS au 6ème item (B.2)
- B.6O choix du ONPPS au 6ème item (test B.2)
- B.EM erreur pour le modus ponens (test B.2)
- B.BR "bonne" réponse (test B.2)
- C.HM ensemble des rép. "hors modèles" (C.1)
- B.HM idem (test B.2)
- C.BR "bonne" réponse (test C.1)
- B.FR fausse réciproque (test B.2)
- C.RR résistance fausse réciproque (C.1)
- C.6O choix du ONPPS au 6ème item (C.1)
- C.3O choix du ONPPS au 3ème item (C.1)
- C.EM erreur au modus ponens (test C.1)
- B.EQ erreur type "équivalence" (test B.2)
- B.BR "bonne" réponse (test B.2)

fig. II.41 : épreuve 2 . Axes 1 et 2

II.5 Publications postérieures à ma thèse de 3ème cycle

Depuis 1980 un certain nombre de travaux ont été produits sur ce même sujet; j'en présenterai ici deux qui reposent en grande partie sur mes propres résultats bien que je ne sois pas certain que leurs auteurs soient parfaitement en accord avec mes intentions, ou mes conclusions.

II.5.1 L'expérience de l'I.R.E.M. de Grenoble <LEG83>

L'article de Marc LEGRAND fait état d'une expérimentation ayant, comme pour celle de Luis RADFORD (voir plus loin), l'intérêt de porter sur une population scolaire, donc différente de la mienne et, qui plus est, dans des situations scolaires (en classe de mathématiques). Il s'agissait, pour cette équipe de l'I.R.E.M. de Grenoble, de travailler sur "l'apprentissage du raisonnement" au collège. L'un des tests des cosmonautes étudiés dans ma thèse servit de support à ce travail avec 288 élèves (principalement en 6ème et en 5ème); travail individuel d'abord, en petits groupes ensuite. Outre le fait que les résultats obtenus confirment sans équivoque ceux que j'avais obtenus sur une population plus âgée et extra-scolaire (bien que seuls soient donnés les résultats item par item et que l'on ne sache pas combien d'élèves ont répondu correctement aux quatre items), il semble intéressant de noter que l'idée essentielle que je voulais faire passer dans ma thèse, à savoir que de tels tests n'ont pas de lien avec la logique du raisonnement mathématique, ne semble pas être entièrement perçue par les auteurs de l'expérience. En effet cet article comporte des commentaires intéressants ainsi, par exemple, sur l'effet de la mention du manteau dans l'un des items:

"L'introduction du manteau met en évidence une des difficultés majeures du raisonnement abstrait, difficulté très exacerbée en géométrie: ce que l'on voit prime sur toutes les informations annexes (hypothèses, résultats intermédiaires, contre-exemples, etc...). Ici, puisqu'on ne peut matériellement voir la chemise du cosmonaute américain, 41% des élèves pensent qu'on ne peut pas en connaître la couleur et 25% des groupes continuent à le penser et ce malgré le peu d'engouement pour la réponse: on ne peut pas savoir." (p.67).

Je rappelle que dans ma thèse les résultats à cet item furent:

- version "avec manteau" : OUI 48% ON NE PEUT PAS SAVOIR 34%
- version "sans manteau": OUI 56% ON NE PEUT PAS SAVOIR 19%.

Les auteurs de cette expérience ne semblent pas avoir accepté l'idée qu'il ne s'agit pas pour l'élève d'un "raisonnement" abstrait ou non; ce n'est pas parce qu'il est dit que le cosmonaute porte un manteau que l'élève ne peut pas "voir" la couleur de la chemise car, pour les élèves (et, comme je l'espère, pour l'auteur aussi) il n'y a pas de vrai cosmonaute, ni de vrai manteau, ni de vraies chemises. Il s'agit d'un exercice dans lequel l'élève doit flairer le

piège, en l'occurrence puisque dans un seul item le manteau est mentionné, ce doit ça être le piège...ensuite l'élève n'a plus qu'à faire fonctionner son imagination. Je pense donc très fortement que "voir" dans un tel exercice n'a pas du tout le même sens que "voir" dans "voir une propriété d'une figure de géométrie".

II.5.2 La thèse de Luis RADFORD

Luis RADFORD a tout d'abord soutenu un mémoire de D.E.A. à l'Université de Strasbourg, en 1983, intitulé "Remarques sur les commentaires exprimés par les sujets interrogés dans une expérience de B.DUMONT". Ce texte, très bref, privilégie certaines explications de réponses extraites des annexes à ma thèse de 3ème cycle et portant sur seulement deux de mes 57 tests. Sa lecture nous informe principalement sur deux points : d'une part, elle permet de comprendre qu'apparemment l'auteur ne s'est pas penché sur les autres tests et, d'autre part, la conclusion annonce clairement l'intention qui sera à la base de son travail de thèse :

"Pour étudier les conditions dans lesquelles la déduction (formelle) va s'effectuer, il faudrait, il me semble, chercher des tests où l'individu serait contraint à accepter les données, c'est-à-dire où il n'y aurait pas de place à une analyse des contenus. De cette forme on pourrait éviter des parasitages nuisibles et un contrôle des facteurs qui interviennent pour répondre aux questions."(<RAD83> p.14)

Suivant cette préoccupation, et sans s'être rendu compte que j'avais présenté dans ma thèse des tests pouvant y répondre, l'auteur a soutenu, en juin 1985, à Strasbourg, une thèse de 3ème cycle intitulée "Interprétations d'énoncés implicatifs et traitements logiques. Contribution à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée". Avant de regarder de plus près le thème principal, sur l'implication, je regrette que la contribution annoncée dans le titre se résume à ces deux paragraphes qui, je l'avoue, m'ont laissé sur ma faim :

"Il nous semble que la logique a souffert de cette ambiguïté: en venant à l'aide des mathématiques pour les tirer de ce qu'on a appelé au début du siècle leur "crise" elle a fini par en faire partie et, en conséquence, son enseignement devrait s'inscrire dans celui des mathématiques. Mais d'autre part, puisqu'on a souvent pensé (plus ou moins implicitement) que nos raisonnements suivent "naturellement" cette logique, on a inféré qu'il n'y avait guère à enseigner. Ce n'est que par la prise de conscience qu'il s'agit là de deux choses distinctes et que la pensée logique est le fruit d'un long cheminement, qu'un enseignement de la logique pourra prétendre à une place adéquate dans les lycées." (<RAD85> p.200)

Aux pages 15 à 18, mon travail y est présenté, en insistant sur mon "ingénieuse idée" de demander aux questionnés de donner leur avis sur les tests; l'auteur en retient principalement que:

"Le travail de DUMONT jette donc une épaisse ombre de soupçons sur l'adéquation des questions comme celles posées par O'BRIEN et SHAPIRO pour étudier la confusion d'un point de vue formel, entre Condition Nécessaire et Condition Suffisante. Il nous prévient des dangers auxquels on se heurte en voulant explorer des situations formelles à l'intérieur de situations discursives. Une assertion peut être correcte du point de vue discursif, sans l'être du point de vue formel: on peut puiser dans le grand réservoir esquissé par la problématique présentée l'argument ad-hoc, alors que celui-ci n'était pas posé jusque-là."
(<RADF85> p.18)

Comme il était à prévoir d'après la lecture de son mémoire de D.E.A., Luis RADFORD ne semble pas avoir remarqué que d'autres de mes tests (plans de ville, équipes sportives, textes "sans-contexte",...) ne pouvaient pas être réduits à des phénomènes discursifs. Ce qui explique qu'il ait eu le désir de créer de "meilleurs" tests permettant d'étudier l'implication. Sa thèse nous fait donc part des résultats obtenus par 316 élèves (16-17 ans) de 1ère S et B (un essai avec des élèves plus jeunes avait permis de trouver que les questions leur semblaient difficiles et qu'ils avaient du mal à les comprendre).

Il y avait cinq exercices par épreuve et deux épreuves (pour éviter les copiages) dont on trouvera les textes en annexe (pages 312 à 322):

- deux (ou trois) sur des circuits électriques,
- un sur des boules numérotées,
- un (ou deux) sur des ensembles et des relations d'appartenance.

Les élèves passèrent ces épreuves pendant un cours de mathématiques :

"les consignes fournies aux élèves étaient brèves et générales. On a évité de parler de 'test de logique'. On leur disait qu'il s'agissait d'un questionnaire qui se plaçait dans le cadre d'un étude de l'Enseignement de Mathématiques. L'épreuve était prévue de 50 minutes (...) mais en général elle n'a pas dépassé les 40 minutes." (<RAD85> p. 57)

Avant de passer à une étude un peu plus précise de ces textes et des résultats, on peut regretter que l'auteur ne donne pas de renseignements sur les réussites globales, ni pour chaque exercice, ni pour chaque épreuve; seuls les résultats items par items sont fournis. Je

reviendrai plus loin sur ce manque. En revanche l'auteur se donne beaucoup de mal, par des études statistiques compliquées pour, analyse factorielle aidant, essayer de différencier ces élèves suivant des "types" de logique correspondants à de nouveaux "stades"...PIAGET n'est pas loin !

-> Les exercices sur les circuits électriques: ils vont du presque simple (1A) au presque illisible (3B).

Première difficulté: ces exercices introduisent le facteur temps, avec un mélange de présent, de futur et de passé (tous relatifs ou "de narration") sur la couleur des lampes.

Pour les exercices 1A et 2A on peut se demander l'intérêt d'avoir introduit des négations dans les énoncés alors que les couleurs possibles n'étant que deux cette complication ne présente pas grand intérêt (pourquoi dire "n'est pas rouge" au lieu de dire "bleue" pour une lampe qui ne peut être que bleue ou rouge ?). On s'étonnera d'autant plus que l'auteur consacre aux effets des négations une étude détaillée des résultats avec des tris croisés...tris croisés que l'on aurait souhaité trouver pour des questions plus fondamentales !

En revanche les textes 4A et 3B sont d'une difficulté, à mon avis, non négligeable (le choix P.H.D. en 3B est-il un clin d'œil du futur docteur ?). Par symétrie, ou simplement en raison de la numérotation II.1, on peut se demander s'il ne manque pas, en bas de page, une question II.2.

- > Les exercices sur les boules numérotées (3A et 1B) ne diffèrent que par les couleurs choisies et la parité des numéros. Pour ce qui est de la formulation on doit se demander ce que signifie le "risque" dans "la procédure risque de ne pas me permettre de conclure" ? En effet deux procédures permettent toujours de conclure et les deux autres ne permettent jamais de conclure, c'est-à-dire quel que soit le contenu restant de l'urne que l'on ne demande pas d'observer. (On peut remarquer qu'en fait ces procédures, formulées ainsi, sont incomplètes puisqu'il manque la phase de conclusion : que se passe-t-il lorsqu'on a "regardé" les numéros ou les couleurs des boules tirées ?). Les explications fournies par l'auteur auraient tendance plutôt à m'inquiéter sur ce qu'il pensait réellement au moment de construire ces textes, qu'à m'éclairer : "nous avons pris une situation en quelque sorte aléatoire"(p.35), "l'incertitude provient du fait qu'on ne connaît pas la composition de l'urne. Bien sûr, nous risquons de récolter des réponses justes sans que cela signifie pour autant que le sujet ait pris conscience du pourquoi des expressions "...me permettra sûrement..." ou "...risque de ne pas...". Ce sera à l'interprétation des réponses, que nous ferons plus tard, de trancher." (p.37). Aucune interprétation ne viendra d'ailleurs trancher ce problème qui pose néanmoins le double sens de "risque" et d'"aléatoire" dans les citations ci-dessus. Ces procédures conduisent "logiquement" à des réponses en tout ou rien, indépendamment des contenus possibles des parties invisibles de l'urne (on ne propose pas une procédure qui

consisterait à vider entièrement l'urne et à regarder toutes les boules !). Or, dans l'esprit de élèves, les problèmes d'urnes sont associés, justement, à des phénomènes aléatoires pour lesquels on "prend des risques" que l'on demande généralement d'évaluer (du genre: "quelle la probabilité de..."). L'auteur ne semble pas avoir pris en compte l'effet d'une telle interprétation dans le comportement de réponse. Enfin, pourquoi parler d'un stock pour ensuite se limiter au contenu d'une urne au lieu d'avoir commencé directement par celle-ci ? Là encore, complications sans intérêt me semble-t-il.

Pour ces exercices en particulier il est regrettable que nous ne connaissions pas le nombre de candidats ayant répondu correctement aux quatre questions posées (par exemple, certains ont-ils accepté plusieurs procédures ?); doit-on en déduire simplement qu'il y a moins de 52% des élèves interrogés qui ont pu répondre entièrement correctement à ces exercices ?

On peut aussi noter que ces exercices ne font pas appel à des formulations du type "si...alors..." mais à une quantification universelle explicite : "toutes les boules noires ont un numéro impair". Bien que l'auteur m'ait explicitement cité (<RAD85> p.25) quant au fait que le test de WASON demande un jugement sur une implication et non pas l'application d'une règle, il ne semble pas avoir utilisé cette différence dans ses exercices avec les boules qui relèvent pourtant d'une problématique assez voisine. Ceci est d'autant plus surprenant que (cf. tableau des réussites ci-dessous) ces exercices sont, item par item, les mieux réussis de l'ensemble.

- > Les exercices ensemblistes (5A, 4B et 5B): ils présentent l'avantage d'être explicitement des exercices de mathématiques. L'auteur présente l'un d'eux comme une formalisation d'un des exercices sur les circuits électriques (2A / 5A). Hélas, contrairement à ce que l'auteur annonce aux pages 39 et 40 de sa thèse, la correspondance n'est pas respectée; ceci peut expliquer l'absence de comparaison directe entre les comportements de réponses aux deux exercices bien qu'ils aient été passés par les mêmes élèves : les deux règles sont inversées et la version "ensembliste" comporte une négation de plus ! Je suis cependant d'accord avec l'auteur lorsqu'il remarque que l'emploi d'une négation avec les couleurs pose sans doute moins de problèmes de compréhension qu'un "p n'appartient pas au complémentaire de Y" (sous forme symbolique dans l'exercice); en effet ceci fait artificiellement apparaître une double négation et complique inutilement le travail. Plus grave, comme je l'ai montré au paragraphe sur l'absence de variables, une telle situation perturbe les questionnés; or ici l'auteur propose des exercices sans variables dans ses implications puisque p, q et r sont les trois seuls éléments de son ensemble de référence. Une telle pratique n'existe pas, à ma connaissance, en mathématiques. Comme on pouvait l'imaginer, ces exercices sont très mal réussis.

II.6 Quelques réflexions d'ensemble

Trois "schémas" sur les quatre possibles sont étudiés ici:

d1: $A \Rightarrow B$; on donne $\neg A$, que dire de B ?

d2: $A \Rightarrow B$; on donne B, que dire de A ?

d3: $A \Rightarrow B$; on donne $\neg B$, que dire de A.

On peut regretter l'absence de l'étude du modus ponens qui, comme je l'ai montré dans ma thèse de 3ème cycle, n'est pas aussi bien réussi que les théoriciens des stades de développement le croient.

Luis RADFORD, suivant l'idée qui concluait son mémoire de D.E.A., veut étudier une implication semi-formelle, c'est-à-dire non réduite à des raisonnements formels purement mathématiques dans des épreuves elles-mêmes mathématiques, mais néanmoins dans des "situations proches du formel" ne laissant pas de place au discursif.

En effet, se référant à certains de mes tests, il se refuse à utiliser des énoncés dans lesquels "contrairement à ce qui se passe dans une situation logico-mathématique (ou formelle), (...) la prémisse et la conclusion ne se trouvent pas au même niveau. En outre, le traitement d'un problème concernant un énoncé implicatif s'effectue en considérant d'autres propositions qui ne figurent pas explicitement dans le texte et qui appartiennent à l'univers du discours dont l'étendue est impossible à cerner." (<RAD85> p. 23).

Les exercices construits à partir d'un circuit électrique, outre les difficultés mentionnées plus haut, ne semblent pas répondre aux exigences de leur auteur, en effet, que l'information soit donnée par un observateur virtuel ou par un programme d'ordinateur, il restera difficile de discerner un comportement semi-formel (?) d'un comportement lié à une interprétation de type causal ou de type "co-occurentiel". Luis RADFORD semble oublier que pour les élèves, comme pour les professeurs, il s'agit d'un exercice scolaire comme un autre dans lesquels les lampes qui changent de couleur n'existent pas plus que l'ordinateur qui les gère ou que l'observateur qui va leur prédire la bonne couleur. Les élèves vont essayer de répondre "le mieux possible" c'est-à-dire de faire plaisir à celui qui pose la question. D'ailleurs si ce raisonnement semi-formel existait et si les exercices proposés par Luis RADFORD permettaient de l'observer, nous aurions des réussites semblables pour les trois types de questions (d1, d2 et d3) indépendamment de l'exercice étudié. Comme on l'a vu plus haut on ne dispose ni des résultats globaux par exercice, ni des résultats croisés au sein d'une même population suivant le type des questions. Ce travail n'a été apparemment consigné que pour des points très secondaires comme l'effet des négations. Néanmoins, les analyses par composantes factorielles, comme celle représentée graphiquement page 78 de <RAD85>, mettent en évidence les différences de comportement à un même schéma logique suivant les

exercices. Il suffisait d'ailleurs de regarder les simples taux de réussite (donnés ci-dessous en pourcentage) pour s'en apercevoir :

	Electricité	Boules	Ensembles
Réuss.d1 mod. A	61 62 56	85	29 27
mod. B	43 54	88	24 21
Réuss.d2 mod. A	14 15 18	55	24 21
mod. B	11	49	29 26
Réuss.d3 mod. A	72 63 56	61	53
mod. B	34	48	63 34

fig.II.42 : Comparaison des taux de réussite (pourcentages)

Même sans être d'accord avec le fond de la démarche de Luis RADFORD on peut cependant regretter ne pas pouvoir profiter de ses travaux sur des points intéressants comme la comparaison entre un problème "habillé" et sa version "ensembliste". En revanche il nous offre une belle illustration de la docilité des élèves qui acceptent de jouer le jeu et de répondre à des exercices ayant des formulations aussi compliquées (même si l'auteur avait décidé de considérer des contextes "pas trop viciés" ! <RAD85> p.23).

II.7 Quelques conclusions utilisables pour l'enseignement et la didactique des mathématiques

Deux conclusions peuvent en être tirées pour l'enseignement des mathématiques :

- l'utilisation de tests du type "concret" n'a d'intérêt que pour faire comprendre aux élèves les différences entre le langage mathématique et le langage "naturel",

- l'enseignement de la logique, si celle-ci devait reprendre vie dans le secondaire, n'aurait pas grand intérêt à s'appuyer sur de tels tests; il serait fort déconseillé de les utiliser pour tenter de mesurer la compréhension de la notion d'implication chez les élèves et encore moins pour essayer de prédire leur capacité à faire des mathématiques !

II.7.1 Population scolaire/non scolaire (formation d'adultes)

Situation scolaire/non scolaire (et liaison avec les mathématiques)

Un des biais, dans le cadre des recherches en didactique, est le recours à des populations scolaires qui, par nature, sont typiquement "captives" et déformées. Deux dangers se présentent alors:

- les élèves, par habitude ou pour faire plaisir à leur professeur, répondent même si les questions qu'on leur pose leur paraissent dénuées de sens (cf. articles de O'BRIEN ou le célèbre "âge du capitaine" de l'I.R.E.M. de Grenoble),

- les élèves répondent en fonction de l'analyse qu'ils font de ce que l'auteur du texte attend d'eux, des pièges qu'il a pu tendre, des domaines de connaissance qui semblent intervenir; ceci peut modifier, par exemple, les comportements de réponses à des tests apparemment non mathématiques posés lors d'un cours de mathématiques.

Le recours à une population non entièrement scolarisée et en dehors d'un cadre scolaire permet de limiter ces risques; une telle population peut aussi être intéressante dans une perspective de formation d'adultes. Il n'est pas conseillé, en fonction même des remarques précédentes, d'extrapoler, à partir d'observations d'élèves ou d'étudiants en formation initiale, les réactions d'un public d'adultes à un test.

II.7.2 Les grandes populations : utilisations de variantes, recherche des paramètres pertinents

Un avantage important de travailler sur des populations nombreuses est de pouvoir tester différentes variantes d'énoncés et de mettre ainsi en évidence la pertinence de certains facteurs dans le comportement de réponse. C'est ce qui, par exemple, nous a permis ici d'apprécier le rôle du contexte ou des formulations.

II.7.3 Modéliser / mathématiser une situation "concrète"

A l'occasion de la création de ces tests et de l'analyse des résultats, nous avons pu vérifier qu'une mathématisation d'une situation "concrète" était quasiment impossible dans le cadre de la recherche de la compréhension des raisonnements des testés. En effet le "concret" conduit chaque candidat à utiliser sa propre connaissance du domaine qui sert de prétexte à la question; sa réponse tient donc compte de certains éléments, pas nécessairement les mêmes pour tous, et pas nécessairement les mêmes que ceux auxquels l'auteur du test a pensé ! Si l'on voulait utiliser ce genre de test pour évaluer des individus, que faudrait-il prendre en compte ? Sa bonne connaissance du domaine et des cas particuliers possibles (en vue d'études juridiques par exemple), sa capacité à imaginer des situations variées et logiquement

cohérentes (par exemple ce jeune titulaire d'un C.A.P. qui ne comprenait pas comment Jojo pouvait "travailler" et cambrioler en même temps) ou bien sa chance de n'avoir retenu que les éléments prévus par le professeur ?

II.7.4 Langage mathématique, langage méta-mathématique et langage dit "naturel"

Le langage utilisé en mathématiques, pas plus que "sa" logique, ne suivent les mêmes règles que celles qui régissent le langage "naturel" et la logique du quotidien. Les épreuves que nous avons fait passer à l'occasion de ma thèse de 3ème cycle ont prouvé, me semble-t-il avec clarté, que les mots utilisés dans de telles questions ne sont pas interchangeables, que les contextes auxquels ils font référence sont chargés de sens pour la plupart des lecteurs et donc pris en compte avec toutes les richesses d'imagination qu'ils peuvent éveiller chez des esprits plus ou moins scolarisés, plus ou moins prêts à "jouer le jeu".

Les résultats qui ont été présentés ici n'apportent pas de réponse à la question de savoir s'il faut ou non enseigner la logique à l'école, et si oui, comment l'enseigner. En revanche ils peuvent faire comprendre aux enseignants de mathématiques les dangers de l'utilisation de situations pseudo-concrètes qui risquent d'introduire des parasites, souvent indécélables (cf. <ADD75/76>), perturbant l'attention des élèves et les incitant à faire fi de leurs connaissances sur le "réel" concerné et/ou de leur "bon sens" au profit d'un comportement de singes savants.

Je crois qu'il existe aussi un risque à laisser entendre que les mathématiques sont une, voire *la*, façon de résoudre les problèmes de la vie quotidienne. Les mathématiques ont certes leurs règles, leurs codes, leurs conventions d'écritures, sur lesquels tous peuvent s'accorder, mais aussi leurs sous-entendus, leur langage méta-mathématique qui, en revanche, peuvent varier suivant les locuteurs. Le langage dit "naturel", de ce point de vue, n'a que peu de points communs avec les mathématiques et, le plus souvent, ils ne sont qu'apparences ou faux-amis.

J'espère sincèrement que l'analyse des comportements logiques, avec toute la richesse de ce terme vue dans ce travail de recherche, pourra servir de base de réflexion pour des enseignants soucieux de comprendre les procédés déductifs de leurs élèves et de leur apprendre qu'en classe de mathématiques il existe des "règles du jeu" qu'il vaut mieux connaître de manière explicite pour réussir.

CHAPITRE III

Enseignement
(non intelligemment)
Assisté
par
Ordinateur

- : - : -

Un programme multimédia sur les coniques avec MITSU™

Une évaluation en analyse avec DECAL™

Un didacticiel sur les nombres complexes avec PLATO™

Un diagnostic d'erreur sur les fractions avec MICRAL™

III.1

Un programme multimédia

sur les coniques

avec

MITSI™

- :: - :: -

III.1.1 PRESENTATION DE LA MACHINE MITSI™

Cette réalisation a été conduite au C.R.E.E.M. (au C.N.A.M.), avec deux autres collègues, dans le cadre du D.E.A. de Didactique des Disciplines de Paris 7 et du C.N.A.M. pendant l'année scolaire 1976-77 sur une machine MITSI™ fabriquée par la société française SINTRA. La particularité de cette machine, maintenant véritable pièce de musée (il en existe d'ailleurs quelques exemplaires à Rouen, au Musée de l'Education de l'I.N.R.P.), reposait sur son aspect multimédia : un traitement automatique, du son et des images. L'ancêtre du vidéodisque interactif ! L'utilisateur pouvait "dialoguer" avec le programme par l'intermédiaire d'un clavier très original mais encombrant de type "console de studio d'enregistrement" : 15 curseurs peuvent être déplacés pour repérer chacun l'un des 70 caractères disponibles (voir détails de ces caractères à la figure III.1, on remarquera entre autres l'absence des symboles { , } et Ø), en plus des positions "OUI" et "NON". MITSI™ offrait par ailleurs la possibilité de claviers particuliers pour des langues autres que latines.

Les caractères choisis s'affichaient les uns à côtés des autres afin de former un "mot" d'au maximum 15 lettres, chiffres ou symboles. Cette chaîne constitue la "réponse" de l'utilisateur et est analysée par l'unité logique qui gère le programme. Des voyants s'allumaient en fonction du résultat de cette analyse, un vert en cas de "bonne" réponse, un rouge dans le cas d'une "mauvaise" réponse (prévue comme telle), un orange sinon.

Le programme était enregistré sur une minicassette de 90 minutes divisée en items (256 au maximum), chaque item étant lui-même divisé en 3 secteurs:

- le pré-commentaire, avec les conditions audiovisuelles (mise en marche d'un compteur-temps, retard de la projection, limitation du temps de projection, retard du commentaire, interruption du commentaire, envoi automatique de l'item suivant),
- le commentaire, enregistré (audio),
- le post-commentaire, avec les réponses prévues, la couleur des voyants, les branchements.

CLAVIER MITSU 2025.

Majus.		Minus.		Majus.		Minus.	
?	?	?	?	G	g	H	h
=	?	+	+	I	i	J	j
x	oui	/	/	K	k	L	l
/	non	+	+	M	m	N	n
+		-	-	O	o	P	p
-		^	^	Q	q	R	r
^		v	v	S	s	T	t
v		/	/	U	u	V	v
/))	W	w	X	x
)		0	0	Y	y	Z	z
0		1	1	[[a	a
1		2	2]]	b	b
2		3	3	,	,	c	c
3		4	4	;	;	d	d
4		5	5	"	"	e	e
5		6	6	/	/	f	f
6		7	7	*	*	g	g
7		8	8	A	A	h	h
8		9	9	B	B	i	i
9		↑	↑	C	C	j	j
↑		((D	D	k	k
())	E	E	l	l
)]]	F	F	m	m
]		,	,			n	n
,		"	"			o	o
"		/	/			p	p
/		*	*			q	q
*		A	A			r	r
A		B	B			s	s
B		C	C			t	t
C		D	D			u	u
D		E	E			v	v
E		F	F			w	w
F						x	x
						y	y
						z	z
						R	R
						r	r
						S	S
						s	s
						T	T
						t	t
						U	U
						u	u
						V	V
						v	v
						W	W
						w	w
						X	X
						x	x
						Y	Y
						y	y
						Z	Z
						z	z
						R	R
						r	r
						S	S
						s	s
						T	T
						t	t
						U	U
						u	u
						V	V
						v	v
						W	W
						w	w
						X	X
						x	x
						Y	Y
						y	y
						Z	Z
						z	z

fig. III.1 : Clavier MITSU™

Les écrans étaient obtenus par projection d'images fixes non interactives, mais d'excellente qualité. Les textes envoyés à l'écran sont de même nature; SINTRA les réalisait à partir de grilles manuscrites fournies par les concepteurs du programme (cf. fig.II.2) ce qui permettait des écritures avec tous les symboles nécessaires et toutes les présentations voulues; la qualité graphique et la lisibilité étaient parfaites. Le seul problème de cette magnifique machine, outre ceux liés à son encombrement et au caractère fastidieux du déplacement des curseurs pour les réponses, tint à sa non fiabilité et à l'impossibilité de SINTRA d'assurer la maintenance de ce matériel.

Le programme donné à titre d'illustration dans ce sous-chapitre n'a pu être visionné qu'une ou deux fois avant que la bande devienne inutilisable.

III.1.2 PRESENTATION DU PROGRAMME

III.1.2.1 Choix du support

Ce programme était destiné aux élèves des classes terminales scientifiques. Nous avons choisi les coniques car, à cette époque de la préhistoire de l'E.A.O. où les ordinateurs disponibles dans l'enseignement n'avaient aucune capacité à traiter du graphique et encore moins des images, MITSITM nous passionnait précisément par ses possibilités de présenter des dessins très nets et des photographies. Nous souhaitons insister sur les aspects géométriques des coniques, les problèmes associés à leur construction et les usages faits par la nature, les architectes ou les physiciens de leurs propriétés. Nous avons entièrement conçu le programme, l'analyse des réponses, les écrans graphiques et même les photographies pour la dernière partie sur les applications extra-mathématiques des coniques !

III.1.2.2 Analyse du programme

Comme cela apparaît clairement dans le tableau suivant, le programme était divisé en quatre parties dont les trois premières d'égal volume et une dernière très courte. Paraboles, ellipses et hyperboles étaient traitées dans cet ordre suivant un schéma à peu près identique : à partir de la définition géométrique (lieu géométrique) et la reconnaissance du type de conique étudié, l'apprenant était conduit à trouver une équation cartésienne; étaient ensuite abordées des propriétés des tangentes qui conduisaient à des possibilités de construction de coniques; chacune de ces trois premières parties se terminait par une illustration de l'existence des coniques dans la réalité. La dernière partie voulait uniquement illustrer l'origine géométrique des coniques comme intersection d'un cône.

C'est surtout sur cet aspect graphique que nous avons fait porter nos efforts tant au niveau des figures qui, rappelons-le, ne bénéficiaient pas de l'animation, qu'à celui des photographies ...pour faire voir à quoi des mathématiques peuvent servir !

III.1.2.3 Organisation du programme

ITEMS	THEMES	SOUS-THEMES	EXEMPLES
A.00 -> A.23	Parabole	définition géom. équations cartés. prop. tangentes construction foyer/dir. exemples "concrets" paraboloïde de révolution	lancer de balle tablier de pont compar. chaîn. four solaire antenne parab.
B.01 -> B.24	Cercle Ellipse	définition géom. équations cartés. affinités prop. tangentes construction exemples "concrets"	"ficelle" point+tang. "bande papier" affinités 2 c. astronomie oscillateur s. station métro
C.01 -> C.24	Hyperbole	définition géom. prop. tangentes équations cartés. asymptotes construction hyperboloïde	cercles+tgtes 1 point+asympt. ficelle château-d'eau interférences
F.01 -> 03	Coniques	intersections avec cône	

III.1.2.4 Analyse de réponse

Sur ce point MITSITM n'est pas très performant. L'auteur doit prévoir les diverses réponses possibles en indiquant (cf. fiche reproduite à la figure III.2) les suites de signes correspondantes (chaque suite ayant au plus 15 caractères) puis la couleur du voyant à allumer et le numéro de l'item suivant. La machine passe en revue cette liste en comparant à chaque fois la suite proposée par l'apprenant avec celle du concepteur jusqu'à épuisement des solutions prévues. Tout commentaire associé à une réponse anticipée devait donc être prévu comme un item particulier, ce qui explique la variété de l'arborescence visible sur l'extrait de l'organigramme détaillé (fig.III.3). Cette façon de faire alourdit la procédure de création et, ce qui me paraît plus gênant, met sur le même plan les items porteurs de contenus (ou de questions) et les items correctifs. L'absence de toute analyse de réponse numérique, en particulier, était un handicap sérieux pour MITSITM dans la voie de l'E.A.O.. La seule possibilité pratique offerte aux concepteurs était le "joker" mis dans la formule de réponse

n° Item

A 05

MCT	PR	PL	CR	CI	EA

code Item

projecteur

1	2	3

raz

temps	score	prog.

image

$$\|\vec{MH}\| = \|\vec{MF}\|$$

$$\vec{MH}^2 = \vec{MF}^2$$

$\beta y^2 + \gamma x = 0$

MEM.	réponses															M	POINTS	VOYIS	N°					
	P	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13					14	15	m	dec	caul
			y	↑	2	-	4	x	=	0								x			v	A02		
			-	2	↑	2	+	4	x	=	0								x			v	A02	
			-	4	x	+	2	↑	2	=	0								v			v	A03	
			4	x	-	2	↑	2	=	0									x			v	A02	
			y	↑	2	=	4	x											x			v	A02	
			4	x	=	4	↑	2											x			v	A02	
			x	=	2	↑	2	/	4										x			v	A02	
			x	=	(1	/	4)	2	↑	2							x			v	A02	
P			1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-				v		A04	

son

Veuillez vérifier nos calculs
 nous vous conseillons d'écrire
 la relation : norme du vecteur MH
 égale norme du vecteur MF sous
 la forme équivalente M.H carré
 égale M.F carré, pour obtenir
 une équation du type
 $\beta y^2 + \gamma x = 0$

Répondez à nouveau.

I/S	RÉP	V/P	MEM	BRA	PROJ	GN

BM	VUES

--	--

--	--

--	--

fig. III.2 : Exemple de fiche destinée au constructeur

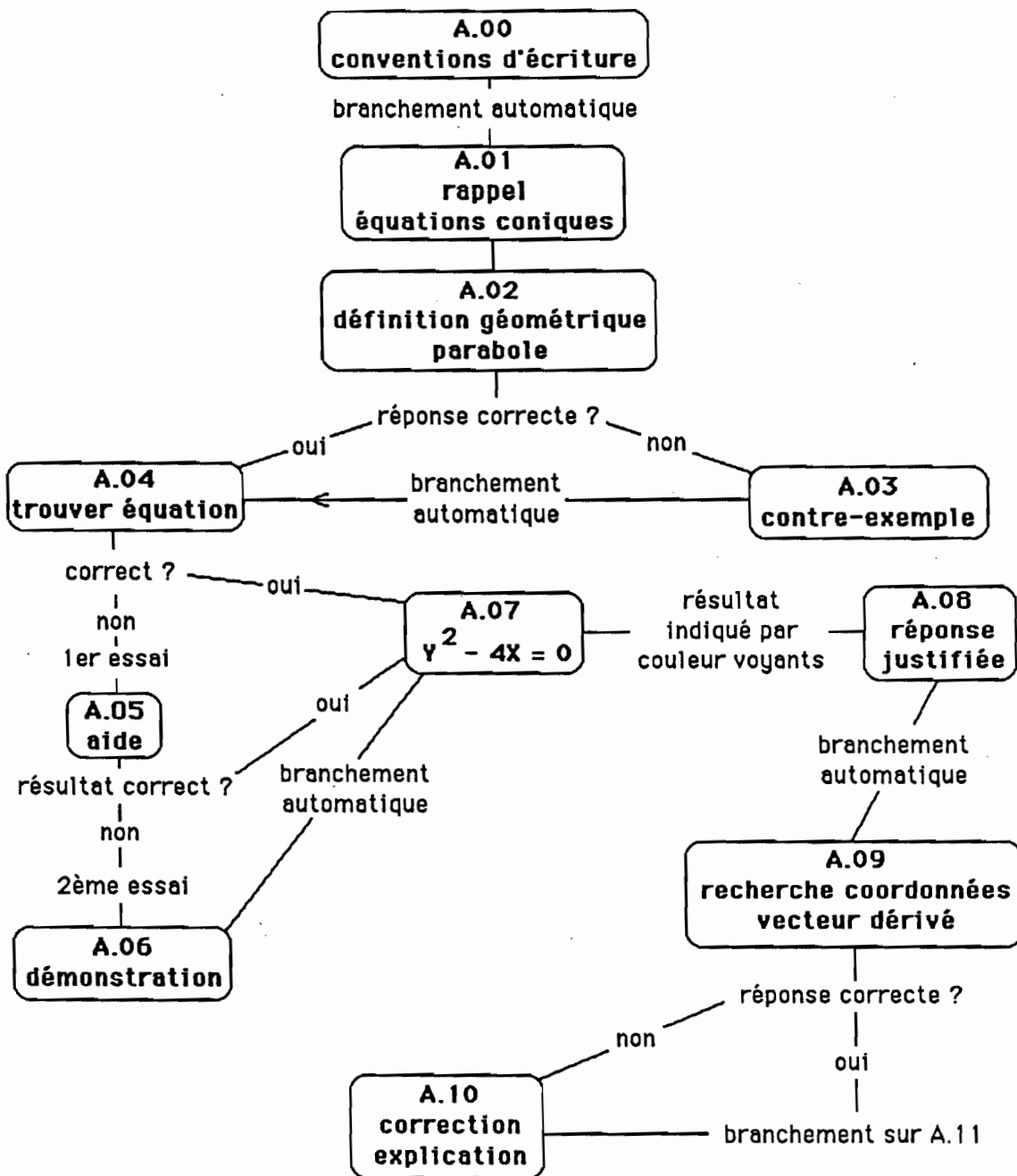


fig. III.3 (Début de l'organigramme détaillé du programme)

anticipée pour remplacer n'importe quel symbole. Les concepteurs disposaient aussi de compteurs permettant de modifier les commentaires en fonction du nombre d'essais et d'un compteur général de points affectables pour chaque réponse anticipée (ou branchement conditionnel).

III.1.3 Quelques remarques pour conclure

Au moment où je construisais ce programme sur MITSITM d'autres collègues travaillaient sur des ordinateurs reliés à des imprimantes (non graphiques bien évidemment) qui "crachaient", page après page et dans un bruit "d'enfer", les premiers "dialogues pédagogiques" entre un élève au clavier et un ordinateur s'exprimant sur papier. J'avais été séduit par MITSITM et avais rejeté l'autre support sans doute parce que le premier, révolutionnaire pour l'époque, avait fait le choix du multimédia et avait misé sur le mélange dirigé de différentes sources d'information : informatiques, sonores, visuelles. Et j'avais proposé les coniques parce qu'elles n'auraient pas pu être traitées, au sens où je l'entendais, par l'autre type d'E.A.O.. Les coniques ont toujours été pour moi un très bel exemple de mathématiques concrètes, c'est-à-dire de mathématiques liées à des réalités naturelles ou humaines extérieures à elles mais pour lesquelles elles apportent des outils de compréhension, d'analyse ou d'organisation. Les coniques étaient donc l'un de mes sujets de cours favoris lorsque j'enseignais en terminale.

Mon expérience avec MITSITM fut très enrichissante au niveau des possibilités d'introduction d'images, aussi bien pour les schémas, éventuellement en couleur et toujours parfaitement réalisés par l'équipe de dessinateurs de SINTRA, que pour les photographies. Je restais néanmoins sur ma faim quant à l'analyse de réponse et à la variété des parcours dans le programme. De fait, les véritables questions ne furent posées qu'en un petit nombre pour laisser plus de place à des séquences d'information ou d'illustration plutôt qu'à des contrôles de connaissances.

Je crois cependant, avec le recul et en regardant ce qui existe, au niveau des outils multimédias, que MITSITM aurait pu rendre de grands services pour l'apprentissage individualisé si les recherches avaient pu être conduites en misant plus sur les images et en acceptant les limitations du recours au clavier, par exemple en jouant plus sur des dialogues restreints de type Q.C.M. qui auraient diminué les temps de réponse et allégé la tâche de l'apprenant devant son clavier et ses curseurs. (Pour l'utilisation de MITSITM pour des QCM, et sur les espoirs soulevés par ce genre de machine à la fin des années '70, voir <CHA77>)

MITSITM pourrait aussi nous rappeler que des images de type analogiques (issues d'un carrousel de diapositives ou d'un vidéodisque) gérées par ordinateur peuvent être des aides efficaces et transporter des informations que le graphisme des ordinateurs ne permet pas encore de concurrencer.

III.2

Une évaluation en analyse avec DECAL™

-:-:-

En relatant ici, et de manière assez détaillée, cette expérience je n'entends pas proposer un modèle d'E.A.O. mais plutôt illustrer ce que, à cette époque, je pensais être une utilisation intéressante de l'informatique dans l'enseignement. En dehors de défauts sans doute liés au fait qu'il s'agissait d'un travail plus personnel que collectif, le lecteur pourra remarquer la place faite à des préoccupations de mise en valeur de l'ordinateur plus qu'à des soucis d'ordre pédagogique. Mais nous étions alors un bon nombre à vouloir convaincre collègues et responsables de l'importance du développement de l'E.A.O.... J'essaierai aussi de montrer, le cas échéant, comment, avec ce type de support informatique nous résolvions les problèmes de questionnement et d'analyse des réponses.

III.2.1 PRESENTATION DE L'EXPERIENCE

Cette expérience visait l'étude d'un langage-auteur, DECAL™, installé sur un mini-ordinateur (PDP-1170), à des fins de construction d'un test de contrôle de connaissances. Le public visé était constitué des 90 élèves de 1ère année de l'E.S.I.E.E. (première année après le baccalauréat) et le thème retenu, celui du programme d'analyse (continuité, dérivabilité, intégration) des classes terminales scientifiques. L'expérience eut lieu au cours du mois de décembre de 1976 et du mois de janvier 1977. Par groupes de 10 élèves environ, le test fut proposé en présence d'au moins un professeur (mathématiques ou/et informatique). A cette époque de l'année tous les élèves avaient déjà acquis une connaissance suffisante du terminal pour ne pas être perturbés par les contraintes du clavier, au niveau des notations en particulier. L'épreuve était limitée à une heure mais le temps moyen ne fut que de moitié et les temps extrêmes compris entre 7 et 52 minutes. Cette première expérimentation était analysée avec précision afin d'établir une seconde version du test pour un usage ultérieur de type test d'auto-contrôle. Cette version a été implantée dès la fin de l'année scolaire 76-77 et utilisée, en libre-service, l'année suivante mais aucune étude ne fut faite alors.

Ceci constitue une illustration de certains problèmes que l'on retrouve tout au long de mon travail sur les questionnaires.

En effet cette première version avait pour objectif, outre celui de valider le test, celui de "fermer" certaines questions, c'est-à-dire de recueillir les réponses fournies réellement par les élèves à certaines questions ouvertes pour en tenir compte dans l'analyse de réponse.

Par la même occasion nous avons aussi appris que certaines notions supposées assimilées à la fin de terminale n'étaient en fait que superficiellement comprises (par exemple, que pour plus de 80% des testés, toute fonction intégrable est continue) et donc que les enseignants de 1ère année devaient en tenir compte dans leur enseignement de début d'année. En analysant à la main, "à la mitaine" comme on dit au Québec, des réponses ouvertes, nous avons découvert par exemple que, pour plus de 10% des élèves, la fonction "partie entière" est discontinue en tout point de son domaine de définition (mais il est vrai que celui-ci n'était pas précisé, ni par l'auteur du test ni par les étudiants !).

III.2.1.1 Présentation du langage-auteur DECAL™

DECAL™ est un langage-auteur très "classique" préfigurant de nombreux produits que l'on trouve encore aujourd'hui sur le marché, mais sur micro-ordinateurs.

Une "leçon" est décomposée en un certain nombre de segments (50 au maximum, 21 dans le cas de notre expérience) formant une unité ayant sa logique propre :

- un texte de présentation pouvant éventuellement conduire à une intervention de l'élève (aspect "question/réponse"); dans ce cas l'auteur doit indiquer :
- une liste de réponses anticipées, dites "correctes", avec, éventuellement, un commentaire particulier et, dans tous les cas, l'indication d'un branchement vers un autre segment;
- une liste de réponses anticipées, dites "incorrectes", avec, là encore, une possibilité de commentaire et le branchement vers un autre segment après un nombre d'essais fixé aussi par l'auteur et pouvant varier pour chaque réponse anticipée;
- un commentaire est possible pour les réponses non anticipées ainsi que le nombre d'essais avant branchement vers un autre segment; ces réponses sont automatiquement enregistrées; leur analyse nous a permis d'affiner nos commentaires et de "fermer" un certain nombre de questions dans le second volet de notre travail, comme on le verra plus loin.

La valeur d'un langage-auteur (ou d'un système-auteur d'ailleurs) tenait en grande partie à sa capacité d' "analyser" les réponses fournies par l'élève pour pouvoir tant soit peu lui permettre de dialoguer avec le logiciel et de s'exprimer assez "librement". MITSITM, nous l'avons vu, ne présentait pas beaucoup de facilités à ce niveau là. Pour cette expérience en cours nous y attachions une certaine importance puisque nous envisagions de développer des produits de type E.A.O. avec DECAL™.

Pour les réponses anticipées (classées sous deux rubriques: les "bonnes réponses anticipées" et les "réponses incorrectes anticipées"), trois possibilités sont offertes à l'auteur quant au type d'analyse, là encore très "classique":

- chaîne de caractères : le testé doit taper sur le clavier la séquence exacte de caractères prévue, tous les éléments résiduels qui suivent étant ignorés (par exemple, pour le segment 2 de la seconde version, nous avons été ainsi amenés à prévoir les écritures suivantes:

PAS DEFINIES, NON DEFINIES, PAS DEFINIS, NON DEFINIS, PAS DEFINI, PAS DEFINIE, NON DEFINI, NON DEFINIE - voir ci-dessous le problème de la négation);

- réponse numérique : l'auteur peut prévoir:

- soit un nombre,

- soit un intervalle, auquel cas tout nombre de l'intervalle est accepté,

- mot-clef : celui-ci peut-être:

- soit le premier mot de la réponse,

- soit n'importe quel mot dans la réponse s'il est précédé d'un blanc, d'un caractère de ponctuation et suivi d'un blanc ou d'un caractère de ponctuation, d'un "retour-chariot" à condition, origine de DECAL™ oblige, qu'il ne soit pas précédé de NOT.

On retrouve ici les problèmes généraux posés par l'essai de la compréhension des réponses "ouvertes" par de simples mots-clefs sans tenir compte des négations (et des diverses formes qu'elles peuvent revêtir) ou des ambiguïtés du langage "naturel".

Par exemple, pour la question du segment 6 :

LORSQUE VOUS VOULEZ PROUVER QU'UNE FONCTION EST CONTINUE EN UN POINT ET LORSQUE CETTE FONCTION NE FAIT PAS PARTIE D'UN ENSEMBLE "CLASSIQUE" DE FONCTIONS CONTINUES, QUEL OUTIL MATHEMATIQUE UTILISEZ-VOUS LE PLUS COURAMMENT?

La liste des réponses anticipées correctes prévoyait "LIM", "LIMITE" et "LIMITES". Ainsi par exemple les réponses: "JE NE SAIS PAS MAIS CA NE DOIT PAS ETRE UNE QUESTION DE LIMITE" ou "CA DEPASSE MES LIMITES" auraient entraîné le commentaire "BIEN, CONTINUONS" et le branchement sur le segment suivant !

L'auteur peut aussi prévoir, pour chaque segment, un message d'aide, apparaissant à la demande du testé.

Autre possibilité offerte par DECAL™ : l'apprenant peut arrêter son travail à tout moment; en cas de reprise il est replacé au segment atteint au moment de l'arrêt.

Au niveau des statistiques, DECAL™ offre aux auteurs, à partir du fichier élèves, les renseignements suivants :

- les réussites (ou échecs) pour un groupe d'élèves,
- les moyennes de temps de présence à chaque segment,
- et pour chaque élève:
 - les segments où il a échoué,
 - ses réponses non anticipées,
 - la première réponse fournie et celle du départ du segment (on ne dispose donc pas de la totalité du cheminement),
 - le nombre d'essais,
 - les demandes d'aide.

III.2.1.2 Organigramme du test

Comme on le verra sur l'organigramme suivant, le test était, dans sa structure globale, pratiquement linéaire, ce qui est, hélas, "classique" en E.A.O. et encore plus dans le cas de tests de connaissances, même si les langages-auteurs, tels que DECAL™, permettent des constructions arborescentes plus évoluées. Néanmoins chacun des segments avait, dans la presque totalité des cas, une structure plus complexe que le simple "Bien continuez"/"Faux, recommencez". L'analyse de réponse, bien que fruste, était utilisée pour différencier les commentaires et essayer d'adapter ceux-ci aux erreurs repérées.

Ce travail permet aussi d'illustrer le lien entre la méthode de construction et l'objectif de l'épreuve. Ici, il s'agissait d'un contrôle de connaissances et non d'un exercice d'auto-formation; ainsi, sans me limiter à uniquement indiquer si la réponse était correcte ou non, je n'avais pas pour objectif d'apporter un remède à des lacunes graves repérées mais, simplement, le cas échéant, d'offrir une illustration ou un contre-exemple. D'un point de vue méthodologique, cela se traduisait par un nombre restreint d'essais pour les questions de type Q.C.M. simple, sans possibilité de revenir en arrière.

Remarque : dans l'organigramme "fct" est une abréviation de "fonction" et "fcts" est mis pour "fonctions".

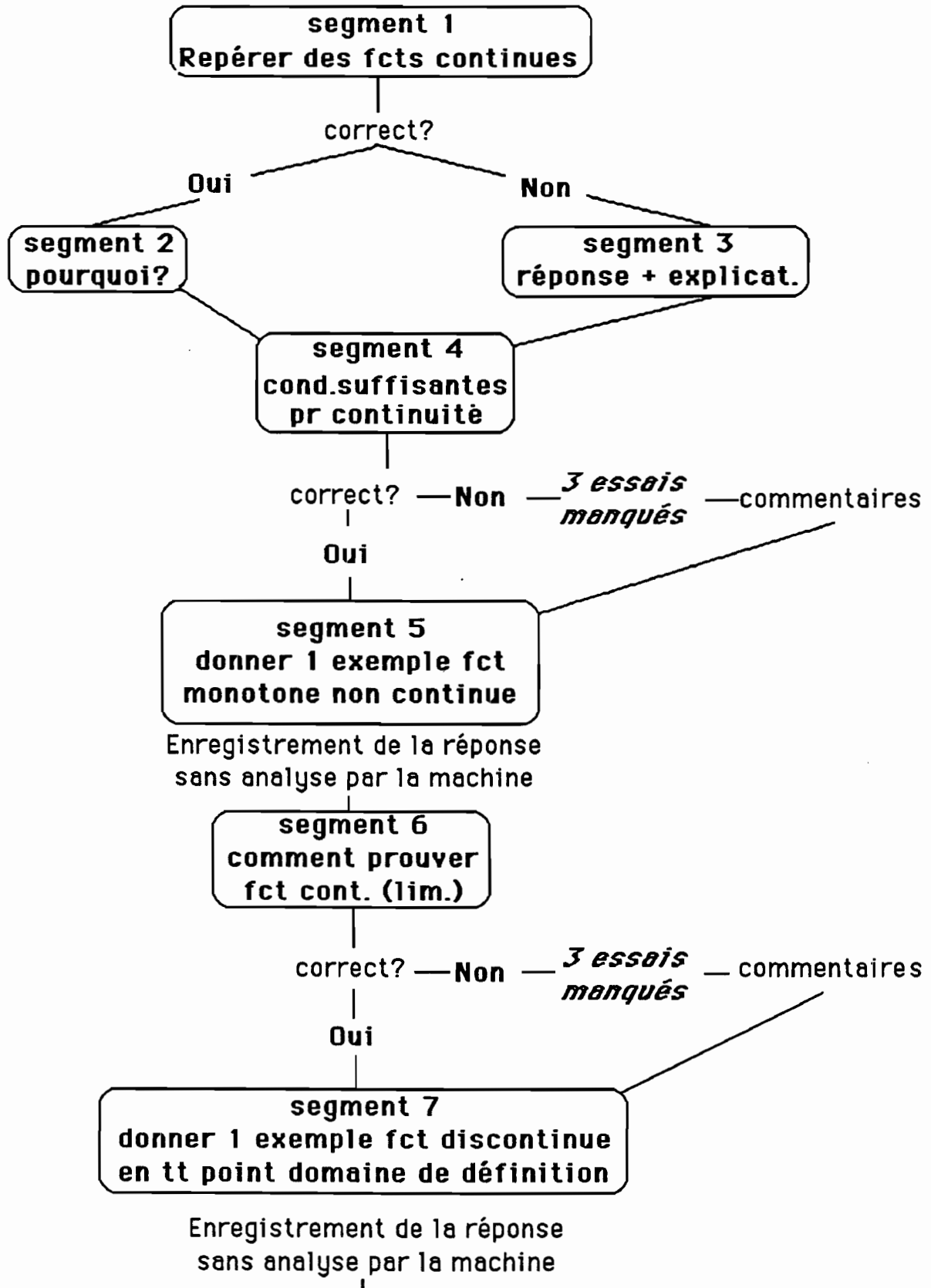


fig.III.4 : Organigramme du test d'analyse (première partie)

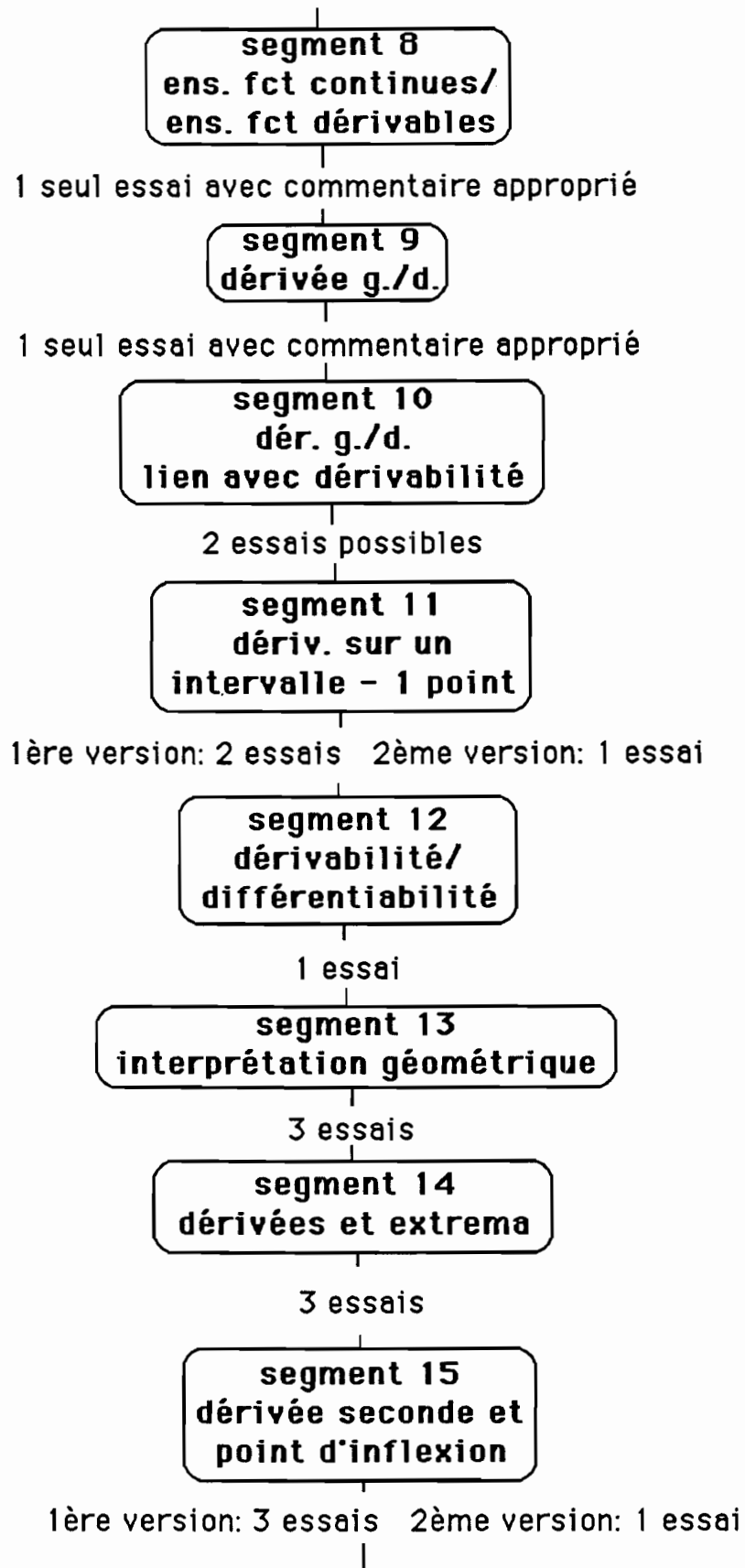


fig.III.5 : Organigramme du test d'analyse (deuxième partie)

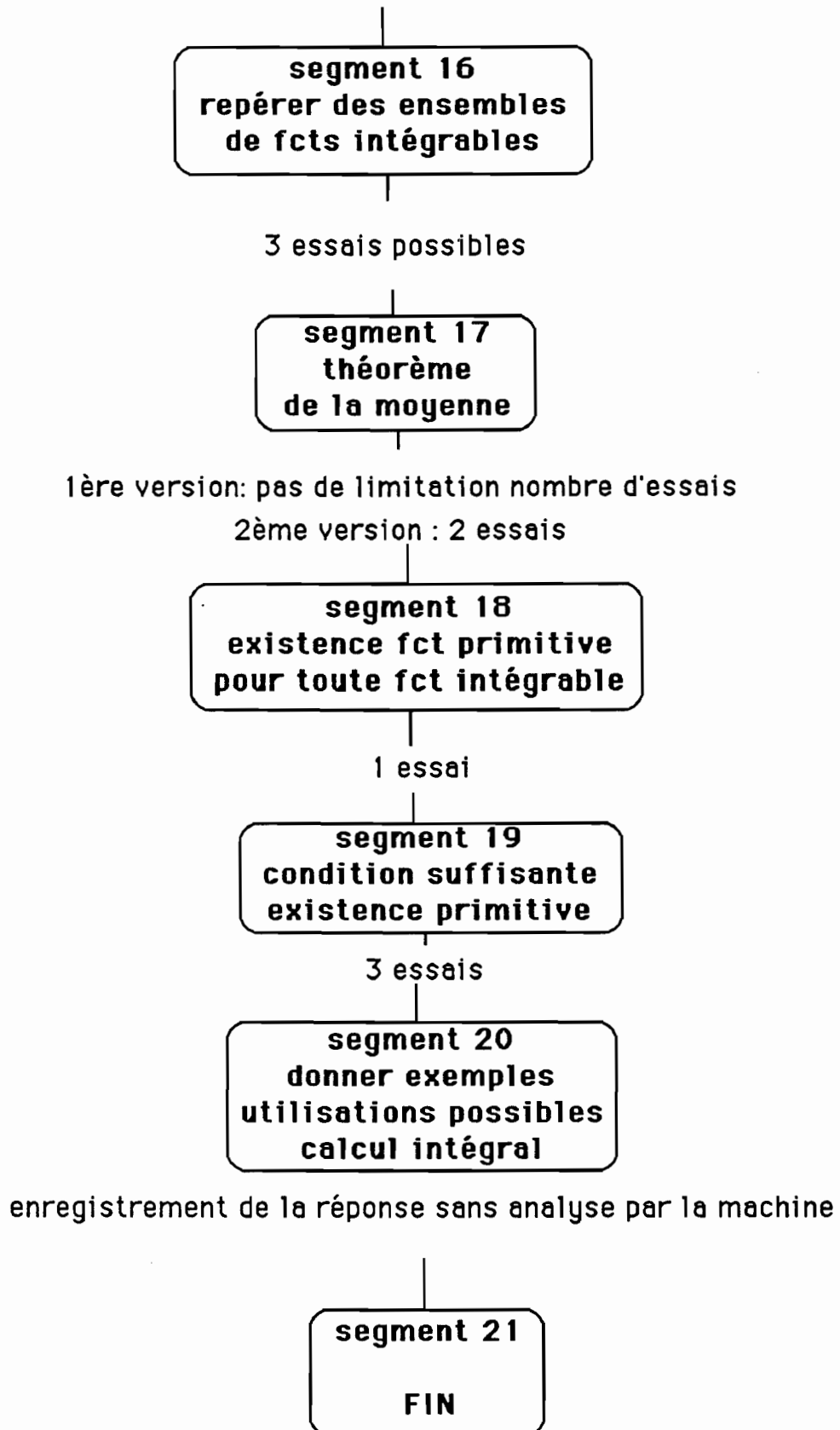


fig.III.6 : Organigramme du test d'analyse (dernière partie)

III.2.1.3 Construction du questionnaire sur ordinateur

La méthodologie choisie, ainsi qu'il a été dit précédemment, consistait à utiliser des questionnements ouverts pour préparer le questionnaire final. Mais certaines faisaient partie d'un questionnement fermé, c'est-à-dire que j'avais prévu un certain nombre de mots-clefs pour "deviner" l'essentiel de la réponse de l'élève et en tirer une conclusion sur la valeur de la réponse. Je pensais qu'en agissant ainsi l'élève ne serait pas guidé trop facilement vers la réponse attendue.

Par exemple (segment 6) :

LORSQUE VOUS VOULEZ PROUVER QU'UNE FONCTION EST CONTINUE EN UN POINT ET LORSQUE CETTE FONCTION NE FAIT PAS PARTIE D'UN ENSEMBLE "CLASSIQUE" DE FONCTIONS CONTINUES, QUEL OUTIL MATHEMATIQUE UTILISEZ-VOUS LE PLUS FREQUEMMENT?

J'attendais le mot "LIMITE" mais j'estimais que la question serait trop simple si elle se présentait sous la forme d'un Q.C.M. .

D'autres questions étaient réellement associées à des questionnements ouverts, c'est-à-dire que pour elles aucune analyse automatique de réponse n'était prévue; ainsi, par exemple (segment 7) :

...DANS TOUS LES EXEMPLES PRECEDENTS NOUS AVONS RENCONTRE DES FONCTIONS CONTINUES SUR PRESQUE TOUT LEUR DOMAINE DE DEFINITION, SAUF PEUT-ETRE EN DES POINTS ISOLES.

SERIEZ-VOUS CAPABLE DE NOUS DONNER UN EXEMPLE DE FONCTION QUI NE SOIT CONTINUE EN AUCUN POINT DE SON DOMAINE DE DEFINITION?

SI OUI TAPEZ VOTRE EXEMPLE.

SI NON TAPEZ AIDE ET NOUS VOUS DONNERONS UN EXEMPLE.

Dans ce cas la réponse était simplement stockée par DECAL™, aucune analyse immédiate n'étant prévue; l'information recueillie était plus destinée à l'enseignant qu'à l'élève.

On peut cependant remarquer que toute cette partie du test repose plus, en fait, sur la notion de domaine de définition plutôt que sur celle de continuité. Pour un élève, même brillant, de terminale C, une fonction qui ne serait définie que sur \mathbb{Z} serait-elle ou non continue ? Il eut

sans doute été plus pédagogique (et moins sujet à mauvaise interprétation d'échec ou de réussite) de ne considérer que des fonctions définies sur \mathbb{R} .

Autre exemple : la question du segment 17 a permis de réaliser, pour la seconde version, un questionnaire fermé en tenant compte des réponses fournies lors de la première passation :

**DANS LE THEOREME DE LA MOYENNE, QUELLE PROPRIETE
DEMANDE T'ON A LA FONCTION CONSIDEREE?
SI VOUS NE VOUS SOUVENEZ PAS DE CE THEOREME TAPEZ: JE NE
SAIS PAS.**

En effet, en dehors des réponses attendues "continue" et "continuité", j'ajoutai, au vu des réponses non anticipées, "intégrable", "intégrabilité", "monotone", "monotonie", "dérivable" et "dérivabilité", fermant ainsi de fait ce questionnaire.

III.2.1.4 Modifications effectuées suite à la première version

La passation de la première version avait pour objectif principal de valider le didacticiel, son organisation (nombre d'essais en particulier), la rédaction des questions et l'analyse des réponses (avec éventuellement le projet de fermer certains questionnements).

Comme il a été dit au premier paragraphe, cette seconde version (on trouvera à la fin de ce sous-chapitre le texte complet des exercices et des analyses de réponses) a bien été implantée mais aucune analyse réalisée lors de son utilisation ultérieure. 12 segments, sur 21, ont été modifiés. Ces modifications peuvent être classées sous les rubriques suivantes :

a) modification de l'organisation d'un segment:

- suppression de la possibilité d'une demande d'aide, une seule personne l'ayant sollicitée dans la première version, mais reprise du texte de la question dans le cas d'une réponse non anticipée (segment 1),

- classement de la réponse "SUITE" (les étudiants ayant fourni des réponses non reconnues par le programme étaient invités à taper "SUITE" afin de leur envoyer un commentaire particulier dans le cas où ils ne souhaiteraient pas essayer de reformuler leur proposition) dans la catégorie "réponse incorrecte anticipée" et non plus dans "réponse correcte anticipée"; en effet ceci faussait les statistiques des réussites car les étudiants répondant "suite" étaient comptés à tort parmi les "bons" dans la première version (segments 2 et 19),

- suppression des essais multiples dans le cas de Q.C.M., en raison du caractère "évaluation sommative" du test, et du risque de réponse correcte par éliminations successives des incorrectes (segments 11, 14 et 15),

- changement du type de réponse anticipée, "mot-clef" au lieu de "chaîne de caractères", pour éviter le rejet de réponses correctes mais introduisant des parasites (blancs,

mots supplémentaires,...) quitte à accepter à tort des réponses ambiguës ou comportant des négations, dans une question présentant des difficultés de formulation (dérivées à gauche et à droite, segment 10),

b) modification des textes des questions

- sur le fond: au segment 10, ajout de "(EN SUPPOSANT QU'ELLES EXISTENT)" au texte initial de la question:

**QUELLE EST LA CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE
PORTANT SUR LES DERIVEES A GAUCHE ET A DROITE
POUR QUE F SOIT DERIVABLE EN A ?**

(on aurait peut-être pu ajouter "EN A" après "LES DERIVEES A GAUCHE ET A DROITE" pour être plus précis),

- sur le mode d'emploi: invitation à noter le texte de la question (segment 16),

- pour des raisons pédagogiques : au segment 17, les étudiants obtiennent le texte du théorème de la moyenne plutôt qu'une simple invitation à aller consulter leur livre d'analyse de terminale !

c) modification de l'analyse des réponses:

- ajouts de réponses anticipées tenant compte de l'analyse des propositions non anticipées (nouveaux mots-clefs ou orthographes nouvelles), et donc entièrement stockées par DECAL™ lors de l'expérimentation avec la première version, des étudiants et, dans certains cas, de commentaires appropriés (segments 2, 6 et 17).

III.2.1.5 Cas particulier : le choix de réponse "JE NE SAIS PAS"

Cette possibilité était offerte dans plusieurs questions; ainsi par exemple :

- question du segment 5 (exemple de fonction monotone qui ne soit pas continue) : 6 étudiants (sur 90) répondent "JE NE SAIS PAS", alors que tous s'étaient vus présenter un exemple de fonction en escalier de ce type à la question du segment précédent (en raison de leur échec à celle-ci),

- question (Q.C.M. simple) du segment 9 (fonctions ayant une dérivée à gauche et une dérivée à droite) : le 4ème choix "JE NE SAIS PAS" n'a été retenu par aucun candidat.

D'une manière générale, on constate un emploi plus fréquent du "JE NE SAIS PAS" pour les questionnements ouverts ou implicitement fermés que dans les Q.C.M.; ceci s'explique sans doute par l'absence de risque -dans le cas présent aucune sanction "officielle" n'était attachée à ce test- que le candidat prenait à choisir l'une des réponses proposées dans un Q.C.M. tandis que dans les autres cas il devait faire preuve d'imagination et prendre la peine de s'exprimer en respectant les contraintes de la console (cf. ci-dessous).

III.2.2 D'un point de vue didactique

III.2.2.1 Quelques résultats sur les connaissances des étudiants (au travers de leur performance au test):

- 12% des étudiants déclaraient que $x \rightarrow \text{EXP}(x-5)$ n'est pas continue en zéro,
- plus de 80% des étudiants pensaient que l'ensemble des fonctions intégrables (au sens de RIEMANN) est inclus dans celui des fonctions continues et presque 70% qu'il est inclus dans l'ensemble des fonctions monotones,
- moins de 40% des étudiants citaient la fonction caractéristique des rationnels comme exemple de fonction discontinue en tout point de son domaine de définition et plus de 10% proposaient la fonction partie entière,
- 25% des étudiants ont déclaré vraie la proposition suivante :
($F'(A)=0$ ET $F'(X)$ CHANGE DE SIGNE SUIVANT QUE $X < A$ OU $X > A$)
 \iff (LA COURBE D'EQU. $Y=F(X)$ ADMET UN EXTREMUM EN $(A, F(A))$),
contre 40% de "bonnes réponses" (voir plus loin les différentes critiques sur cette formulation),
- presque 18% des étudiants pensaient que le théorème de la moyenne "demande" que les fonctions soient intégrables et 16% préférèrent répondre "JE NE SAIS PAS",
- comme exemples d'applications de calcul intégral, ont été cités:
 - aires et surfaces (82%)
 - volumes (66%)
 - moment d'inertie/centre d'inertie/centre de gravité (33%)
 - longueur de courbes (13%)
 - travail (13%)
 - électricité (D.D.P., impédance,...) (13%)
 - équations différentielles (8%).

III.2.2.2 Quelques problèmes ou erreurs de conception

- Au segment 1 on peut regretter que les exemples de fonctions non continues ne le soient qu'en raison de leur domaine de définition et non pas de phénomènes réellement liés à la continuité; le lecteur appréciera aussi la qualité du message d'aide tant sur le plan de la rigueur mathématique que sur celui de l'intérêt pédagogique !

- au segment 2, la version corrigée ne prend toujours pas en compte des réponses du type "F(O) N'EXISTE PAS" ou "DIVISION PAR ZERO IMPOSSIBLE" alors que celles-ci furent repérées dans la première version, de même pour l'utilisation de la notion de limite, ouvertement rejetée dans mon compte rendu <DUM77> sous prétexte que seul le domaine de définition était ici intéressant (l'une des réponses non anticipées fut pourtant : "LORSQUE X TEND VERS 0 LA LIMITE N'EST PAS FINIE"),

- dans le segment 5, sur des exemples de fonctions monotones qui ne soient pas continues, les résultats de la première version n'ont pas été utilisés pour fermer tant soit peu la question en prévoyant par exemple la fonction partie entière (17%) (*Remarque* : la fonction $X \rightarrow 1/X$ fut proposée par 20% des étudiants); quant aux candidats répondant "JE NE SAIS PAS" et qui, ayant échoué à la question précédente, avaient reçu un message de correction indiquant que la fonction partie entière était un exemple de fonction monotone non continue sur son domaine de définition, il eût été intéressant, pédagogiquement, d'en tenir compte dans le commentaire qui leur était adressé; cette personnalisation du suivi est un avantage classiquement reconnu du traitement informatique qui n'a pas été utilisé ici,

- au segment 9, Jérôme CHASTENET de GERY fait remarquer que l'énoncé oublie de préciser que ces dérivées existent en A,

- au segment 11, Roger CUPPENS pense que le commentaire associé à l'exemple comporte une précision pouvant être gênante : en disant "N'A PAS DE LIMITE FINIE" je pouvais inviter -à tort- certains étudiants à croire que la limite est infinie; le texte eût été moins ambigu sans "finie",

- les 80% de bonnes réponses au segment 12 sur "dérivabilité" et "différentiabilité" (sous forme de Q.C.M.) ne permet pas en fait de conclure quant aux connaissances des étudiants ayant "réussi"; DECAL™ ne se prêtait sans doute pas à une analyse fine de réponses plus ouvertes sur ces notions mais rien n'a été essayé suite à l'apparent succès de ce segment pour, dans la seconde version, approfondir l'étude; à l'heure actuelle on peut se demander s'il existait un réel intérêt à présenter ces notions au niveau de la terminale...

- partant de l'idée (que je partage d'ailleurs) qu'un théorème est essentiellement vrai, Jérôme CHASTENET de GERY aurait préféré pour la question 14 une formulation du type : "Laquelle de ces propositions est vraie?",

- Roger CUPPENS et Jérôme CHASTENET de GERY se demandent si la question 15 ne prêtait pas à confusion pour des étudiants qui auraient eu pour définition d'un point d'inflexion : un point où "la courbe traverse sa tangente"; je ne partage pas leur avis car, à ma connaissance, les élèves provenant des terminales C ne connaissaient, comme définition d'un tel point, que celle faisant intervenir la dérivée seconde; il y eut d'ailleurs plus 70% de réussites au premier essai; on peut se demander ici, rétrospectivement, si ce questionnement était vraiment correct : n'était-il pas supposé implicitement que la dérivée existait en A ? Auquel cas l'équivalence ne devrait pas être prise comme une erreur. Jérôme CHASTENET de GERY et André REVUZ n'apprécient pas non plus la formulation "F(X) change de signe suivant que $X < A$ ou $X > A$ " qui aurait sans doute pu être simplement remplacée par "F(X) change de signe en A" ou par "F(X) change de signe en passant par A";

- la forme de la question dans le segment 16 où l'étudiant doit taper dans l'ordre croissant et avec des virgules la suite des numéros des "bons" ensembles de fonctions inclus dans celui des fonctions intégrables (en l'occurrence: "1,4,5,6,7") semblait, dans la 1ère version, être la cause d'un grand nombre d'échecs aux premiers essais; la seconde version aurait pu reprendre le problème différemment, par exemple en décomposant la question en 7 sous-questions auxquelles il aurait fallu répondre par OUI ou par NON, au lieu de se contenter d'inviter l'utilisateur à noter le texte de la question sur un papier! Je reconnais aussi que l'ensemble des fonctions logarithmes n'est pas un ensemble classique et qu'il eût été préférable d'utiliser plutôt une expression comme : "l'ensemble des fonctions logarithmes de base a, pour a appartenant à...",

- dans la seconde version du segment 17, sur le théorème de la moyenne, les "bonnes réponses anticipées" sont seulement "CONTINUE" et "CONTINU", ce qui rejeterait comme non anticipée une réponse du genre "JE PENSE QUE C'EST CONTINU" mais accepterait avec les compliments de l'auteur : "JE CONTINUE LE TEST MAIS JE NE CONNAIS PAS LE THEOREME DE LA MOYENNE"; de plus, la rédaction même de la question ne permettait pas vraiment de savoir si l'auteur attendait une condition nécessaire ou suffisante; ainsi la propriété "être intégrable" est bien "demandée" à une telle fonction pour pouvoir appliquer le théorème de la moyenne; en toute logique "mathématique" - et non pas suivant celle de l'auteur ! - cette réponse n'aurait pas dû être classée parmi les réponses incorrectes;

- le segment 18, sur l'existence d'une fonction primitive pour toute fonction intégrable, est fort imprécis dans l'énoncé de la question, où l'on parle d'un "INTERVALLE BORNE (A,B)" sans indiquer s'il s'agit d'un fermé, d'un ouvert ou d'un semi-fermé (les symboles "[" et "]" n'étaient pas disponibles avec DECAL™), ni si A et B sont quantifiés universellement ou existentiellement; il est de plus inutilement (mais sans doute involontairement) compliqué en indiquant "F(0) = F(-1) = F(+1)" sans donner la valeur commune à ces trois expressions (ce qui mathématiquement n'apporte, il est vrai, aucune information pertinente pour le problème concerné, mais risque de gêner un utilisateur non averti); le commentaire n'allant pas plus loin que "VOUS POUVEZ VERIFIER QUE..." est sans doute trop optimiste quant aux performances des étudiants de ce niveau. Ceci pose le problème des tests d'évaluation qui ne veulent pas aller jusqu'à l'auto-formation/auto-correction en apportant une information suffisante à l'utilisateur pour tirer pleinement profit de la révélation de son erreur; c'est ce genre d'E.A.O. que l'on trouve encore, hélas, sur Minitel aujourd'hui (cf. chapitre sur Q.C.M. et télématique).

Pour terminer cette auto-critique à retardement, voici une erreur de logique : au segment 19, je demandais "QUELLE PROPRIETE FAUT-IL DEMANDER A F POUR ETRE CERTAIN QU'ELLE ADMETTE UNE PRIMITIVE SUR (A,B)?", au lieu de "QUELLE PROPRIETE SUFFIT-IL DE DEMANDER...", ce qui n'a pas eu l'air de gêner les testés (76% de réussites au premier essai).

III.2.2.3 Contraintes d'affichage

Ce travail m' a aussi amené à réfléchir aux problèmes des affichages de textes mathématiques tant au niveau de la question, c'est-à-dire du point de vue de l'auteur, qu'à celui de la réponse, c'est-à-dire de l'étudiant. En effet l'un et l'autre ne disposaient, à partir de la console, que des lettres majuscules et des signes suivants :

< > . ; ! ? / = ' * ()

ce qui évidemment pose le problème de la transcription des autres symboles mathématiques; ainsi l'expression :

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ s'écrit avec DECAL™ : F(X) = (X**2) SIN (1/X)

III.2.3 Conclusions

Ce premier travail liant didactique et informatique m'aura conduit à :

- une connaissance des possibilités et des limites d'un langage-auteur dans le cadre des tests de connaissances, en particulier les problèmes posés par l'affichage des expressions symboliques et l'analyse des réponses fournies par le testé en langage dit "naturel",
- une méthode de construction de questionnements fermés à partir d'un pré-questionnaire ouvert,
- comprendre l'intérêt d'une bonne connaissance des erreurs possibles pour construire un test pertinent.

Avec le recul, et malgré les "bonnes intentions" originelles, ce travail m'apparaît fortement entaché d'erreurs tant sur le plan didactique qu'informatique :

- l'ensemble est très "verbeux"; beaucoup de phrases et peu d'expressions mathématiques ou d'exemples de fonctions (le seul cas se trouvant dans le segment 1 pour une utilisation discutable comme nous l'avons vu plus haut); les contraintes d'affichage ne jouant pas un rôle si gênant vu les habitudes des utilisateurs et la (relative) simplicité des expressions en usage en terminale ou en première année de l'Ecole,
- les questions relèvent le plus souvent de connaissances de type "juridique" (on a le droit de..., on demande aux fonctions d'être.....) ou théoriques (inclusions d'ensembles de fonctions, comparaison d'écritures de propriétés avec des implications ou des équivalences,...),
- la formulation des questions est souvent ambiguë et l'analyse des réponses simpliste et très scolaire,
- le cheminement de l'élève est quasiment linéaire et à un seul nœud (segment 1) un contrôle de la raison de son choix est prévu.

D'une manière générale, d'une part, le travail didactique préalable ne semble pas avoir été suffisant et, d'autre part, ce logiciel se différencie peu d'une activité de type "livre-brouillé" et justifie peu le recours à l'informatique. Je l'ai présenté ici pour illustrer quelques préoccupations en E.A.O. vers la fin des années '70; il me semble important d'avoir un regard, déjà historique, sur les usages de l'informatique en éducation.

L'absence de graphisme, la pauvreté (relative) des analyses de réponse ne suffisent pas à expliquer la pauvreté pédagogique d'un tel produit.

Mon but, inavoué sans doute à l'époque, était de justifier le recours à l'informatique, de montrer que dans cette école spécialisée en électronique et très bien équipée en matériel informatique, nous pouvions développer des didacticiels. Je souhaitais aussi me confronter à la réalité de la machine, en l'occurrence un "gros" ordinateur, et essayer de le "plier" aux besoins de l'enseignement.

III.2.4

ANNEXE 1

RESULTATS GLOBAUX

(1ère version du test)

Temps moyen: 29 minutes

Temps extrêmes: 6mn 50s (9 segments réussis sur 18)

51mn 12s (11 segments réussis sur 19)

Scores extrêmes: 3 élèves ont réussi tous les segments

9 élèves ont réussi 18 segments sur 19

2 élèves n'ont réussi que 8 segments

III.2.5

ANNEXE 2

TEXTE DES QUESTIONS
et ANALYSE des REPONSES

SEGMENT 1

TEXTE

BONJOUR.

NOUS VOUDRIONS VOUS AIDER A FAIRE LE POINT SUR VOS
CONNAISSANCES EN ANALYSE. NOUS COMPTONS BIEN ENTENDU SUR
VOTRE FRANCHISE.

AVANT DE COMMENCER CE TEXTE, VEUILLEZ VOUS MUNIR D'UN
CRAYON ET D'UNE FEUILLE DE PAPIER.

A VOUS DE JOUER.

* * * * *
* CONTINUTE *
* * * * *

QUESTION.

PARDI LES FONCTIONS SUIVANTES, DEFINIES SUR
DES SOUS-ENSEMBLES DE R, INDIQUEZ LE(S)
NUMERO(S) DE(S) FONCTION(S) QUI NE VOUS
SEMBLENT PAS CONTINUE(S) EN ZERO.

POUR REpondRE TAPEZ LE(S) NUMERO(S)
SEPRE(S) EVENTUELLEMENT PAR UNE VIRGULE.

EX: 1,2,3,4,5

1. $F(X) = (X^{**3}) + 5*(X^{**2}) + 3*X - 8$
2. $G(X) = \text{SIN}^{**2}(X).$
3. $H(X) = (X+3)/(2*X).$
4. $I(X) = \text{EXP}(X-5)$
5. $J(X) = \text{LOG}(X).$

MESSAGE D'AIDE

UNE FONCTION EST DITE CONTINUE EN A, SI F EST DEFINIE EN A ET SI L'ON PEUT RENDRE F(X) AUSSI PROCHE QUE L'ON VEUT DE F(A) A CONDITION DE PRENDRE X SUFFISAMMENT PROCHE DE A.

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES

3,5 OU 5,3

commentaire: EXACT. VOYONS MAINTENANT POURQUOI.

branchement segment 2

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

3 ou 5

commentaire: VOTRE REPONSE EST INCOMPLETE
ESSAYEZ ENCORE.

1 ou 2

commentaire: REFLECHISSEZ UN PEU.
SI CELA VOUS PARAIT COMPLIQUE,
TAPEZ AIDE.

(3 essais avant branchement segment 3)

REPONSES NON ANTICIPEES

commentaire: RELISEZ BIEN LA QUESTION S.V.P.
SI CELA VOUS PARAIT TROP COMPLIQUE, TAPEZ
AIDE.
EN REpondANT PENSEZ AUSSI A BIEN SEPARER
CHAQUE CHIFFRE PAR UNE VIRGULE.

SEGMENT 2

TEXTE

POUR QUELLE(S) RAISON(S), AVEZ-VOUS PENSE QUE CES FONCTIONS
NE SONT PAS CONTINUES EN ZERO?
REpondez LE PLUS BRIEVEment POSSIBLE EN LAISSANT UN BLANC
AU DEBUT ET A LA FIN DE VOTRE REPONSE.

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES

PAS DEFINIES / NON DEFINIES / PAS DEFINIS / NON DEFINIS /
PAS DEFINI / PAS DEFINIE / NON DEFINI / NON DEFINIE

commentaire: CE N'ETAIT DONC PAS DE LA CHANCE,
ALORS CONTINUONS.

REPONSES NON ANTICIPEES

commentaire: VOTRE INTUITION ETAIT BONNE, MAIS VOTRE
REPONSE NE SEMBLE PAS SATISFAISANTE.
POUR OBTENIR LA REPONSE TAPPEZ SUITE.

(avec SUITE branchement segment 3)

SEGMENT 3

TEXTE

VOICI LA REPONSE:

LES FONCTIONS 3 ET 5 NE SONT PAS CONTINUES
CAR ELLES NE SONT PAS DEFINIES EN ZERO.
NE VOUS DECOURAGEZ PAS, CONTINUEZ.

(branchement automatique au segment 4)

SEGMENT 4

TEXTE

QUESTION

PARMI LES ENSEMBLES SUIVANTS, QUELS SONT
CEUX QUI SONT INCLUS DANS L'ENSEMBLE DES
FONCTIONS NUMERIQUES CONTINUES DEFINIES SUR \mathbb{R} .

1. ENSEMBLE DES FONCTIONS MONOTONES
2. " " " DERIVABLES
3. " " " EN ESCALIER
4. " " " INTEGRABLES.
5. " " " POLYNOMES.

INDIQUEZ VOTRE REPONSE PAR LE OU LES NUMERO(S) DE(S)
ENSEMBLE(S) EN N'OUBLIANT PAS DE VIRGULE POUR LES SEPARER.

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES:

2,5 OU 5,2

commentaire: ALLONS PLUS LOIN

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES:

2 OU 5

commentaire: VOTRE REPONSE EST INCOMPLETE !

3 OU 4

commentaire: VERIFIEZ VOTRE REPONSE

(3 essais avant branchement segment 5, en cas d'échec :

commentaire:

DOMMAGE LE HASARD NE VOUS A PAS FAVORISE
CONSIDEREZ LA FONCTION QUI VAUT

-1 si $X < 0$

0 si $X = 0$

+1 si $X > 0$

CETTE FONCTION EST MONOTONE EST EN ESCALIER
SUR \mathbb{R} , CEPENDANT ELLE N'EST PAS CONTINUE EN
ZERO.

ENFIN LA FONCTION QUI VAUT

0 SI $X < > 0$

1 SI $X = 0$

EST INTEGRABLE SUR \mathbb{R} MAIS N'EST PAS CONTINUE.

SEGMENT 5

TEXTE

POUVEZ-VOUS DONNER UN EXEMPLE DE FONCTION MONOTONE QUI
NE SOIT PAS CONTINUE?

POUR CELA TAPEZ VOTRE EXEMPLE OU JE NE SAIS PAS

MERCI.

REPONSE INCORRECTE ANTICIPEE:

JE NE SAIS PAS

commentaire: C'EST DOMMAGE

REPONSES NON ANTICIPEES:

commentaire: NOUS ENREGISTRONS VOTRE REPONSE, MERCI.
POUR CONTINUER LA LEÇON TAPEZ SUITE.

(branchement automatique au segment 6)

SEGMENT 6

TEXTE

QUESTION

LORSQUE VOUS VOULEZ PROUVER QU'UNE FONCTION
EST CONTINUE EN UN POINT ET LORSQUE CETTE
FONCTION NE FAIT PAS PARTIE D'UN ENSEMBLE
"CLASSIQUE" DE FONCTIONS CONTINUES, QUEL OUTIL
MATHEMATIQUE UTILISEZ-VOUS LE PLUS
COURAMMENT?

MESSAGE D'AIDE

SI LA FONCTION QUE VOUS ETUDIEZ NE FAIT PAS PARTIE D'UN
ENSEMBLE CONNU (PAR EX: FONCTION POLYNOME, FONCTION
DERIVABLE.), COMMENT, HABITUELLEMENT, ARRIVEZ-VOUS A
PROUVER QU'UNE FONCTION EST CONTINUE EN UN POINT?

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES:

(mots-clefs) LIMITE OU LIMITES
branchement automatique au segment 7

REPONSES NON ANTICIPEES:

commentaire: CETTE REPONSE N'ETANT PAS PREVUE, VEUILLEZ
LA REFORMULER AUTREMENT OU TAPEZ AIDE.

(3 essais possibles et en cas d'échec, avant branchement
au segment 7, commentaire:

DESOLE, MAIS NOUS NE NOUS SOMMES PAS
COMPRIS. NOUS VOULIONS VOUS FAIRE PENSER AU
THEOREME SUIVANT:

SI F EST UNE FONCTION DEFINIE EN A
(F CONTINUE EN A) \iff ($\lim_{x \rightarrow A^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow A^+} F(x) = F(A)$.)

SEGMENT 7

TEXTE

POUR TERMINER CE PARAGRAPHE SUR LA CONTINUITÉ, VOULEZ-VOUS BIEN REFLECHIR AVEC NOUS SUR UN DERNIER POINT?

MERCI BEAUCOUP.

LE PROBLEME EST LE SUIVANT. DANS TOUS LES EXEMPLES PRECEDENTS NOUS AVONS RENCONTRE DES FONCTIONS CONTINUES SUR PRESQUE TOUT LEUR DOMAINE DE DEFINITION, SAUF PEUT-ETRE EN DES POINTS ISOLES.

SERIEZ-VOUS CAPABLE DE NOUS DONNER UN EXEMPLE DE FONCTION QUI NE SOIT CONTINUE EN AUCUN POINT DE SON DOMAINE DE DEFINITION?

SI OUI TAPEZ VOTRE EXEMPLE.

SINON TAPEZ AIDE ET NOUS VOUS DONNERONS UN EXEMPLE.

MESSAGE D'AIDE

FONCTION INDICATRICE DES RATIONNELS C'EST-A-DIRE:

$I(x) = 0$ SI X EST IRRATIONNEL.

$I(x) = 1$ si X EST RATIONNEL.

POUR CONTINUER LE CONTROLE VEUILLEZ TAPER SUITE.

MERCI.

REPONSES NON ANTICIPEES

commentaire: MERCI.

VOTRE EXEMPLE EST ENREGISTRE.

POUR CONTINUER, VEUILLEZ TAPER SUITE.

MERCI.

branchement automatique segment 8

4

commentaire: C'EST BIEN REGRETTABLE, CAR IL S'AGIT LA D'UNE PROPRIETE ESSENTIELLE DES FONCTIONS NUMERIQUES. EN EFFET, TOUTE FONCTION DERIVABLE EN A EST CONTINUE EN A MAIS LA RECIPROQUE EST FAUSSE; PRENEZ PAR EXEMPLE LA FONCTION "VALEUR ABSOLUE" QUI EST CONTINUE A L'ORIGINE MAIS QUI N'EST PAS DERIVABLE EN CE POINT.

branchement automatique segment 9

SEGMENT 9

TEXTE

QUESTION

QUE PEUT-ON DIRE D'UNE FONCTION AYANT UNE DERIVEE A GAUCHE ET UNE DERIVEE A DROITE ?

1. ELLES EST DERIVABLE EN A.
2. ELLE N'EST PAS DERIVABLE EN A.
3. ON NE SAIT RIEN DE PLUS SUR LA DERIVABILITE EN A.
4. JE NE SAIS PAS.

REPONDEZ PAR LE NUMERO CORRESPONDANT A VOTRE CHOIX.

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

1 OU 2

commentaire: LE RENSEIGNEMENT FOURNI N'EST PAS SUFFISANT POUR CONCLURE QUANT A LA DERIVABILITE OU NON DE F.

4

commentaire: NOUS LE REGRETTONS !

IL FALLAIT REPONDRE 3 CAR LE RENSEIGNEMENT FOURNI N'EST PAS SUFFISANT POUR CONCLURE QUANT A LA DERIVABILITE OU NON DE F.

branchement segment 10

SEGMENT 10

TEXTE

QUESTION.

**QUELLE EST LA CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE
PORTANT SUR LES DERIVEES A GAUCHE ET A DROITE POUR QUE F
SOIT DERIVABLE EN A?**

(UTILISEZ LES NOTATIONS SUIVANTES:

F'G(A) = NOMBRE DERIVE A GAUCHE POUR F EN A.

F'D(A) = " " A DROITE POUR F EN A.)

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES

F'G(A) = F'D(A) OU F'D(A) = F'G(A)

**commentaire: VOUS AVEZ RAISON: UNE CONDITION NECESSAIRE
ET SUFFISANTE POUR QUE F SOIT DERIVABLE EN A, EST QUE LES
NOMBRES DERIVES A GAUCHE ET A DROITE EN F EXISTENT ET
SOIENT EGAUX.**

REPONSES NON ANTICIPEES:

**commentaire: REFORMULEZ VOTRE REPONSE EN UTILISANT DE(S)
SYMBOLE(S) MATHEMATIQUE(S) SIMPLE(S) ET LES
NOTATIONS:**

F'G(A) = NOMBRE DERIVE A GAUCHE POUR F EN A.

F'D(A) = " " A DROITE POUR F EN A.

2 essais possibles, en cas d'échec commentaire:

**UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE F SOIT
DERIVABLE EN A, EST QUE LES NOMBRES DERIVES A GAUCHE ET A
DROITE EN F EXISTENT ET SOIENT EGAUX.**

branchement segment 11

SEGMENT 11

TEXTE

QUESTION.

SOIT F UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE I ET
DERIVABLE EN I- (A) . (OU A EST UN NOMBRE REEL DE
L'INTERVALLE I). POUR PROUVER QUE F EST DERIVABLE EN A
QUEL MOYEN UTILISEZ-VOUS?

1. RECHERCHE DE LA LIMITE DE LA FONCTION $X \rightarrow F'(X)$.
LORSQUE X TEND VERS A.
2. ETUDE DE LA LIMITE DU TAUX D'ACCROISSEMENT DE F EN A.
3. JE NE SAIS PAS.

REPONSE CORRECTE ANTICIPEE

2

commentaire: LA METHODE 1, N'EST PAS EN EFFET UNE PANACEE
COMME VOUS LE VERIFIEREZ VOUS-MEME SUR L'EXEMPLE SUIVANT:

$$F(X) = (X^{**2})\text{SIN}(1/X) \quad \text{SI } X < > 0$$

$$F(0) = 0$$

VOUS POURREZ MONTRER QUE CETTE FONCTION EST DERIVABLE EN
ZERO ALORS QUE F'(X) N'A PAS DE LIMITE FINIE QUAND X TEND VERS
ZERO.

branchement segment 12

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

1

commentaire: VOUS FAITES LA UNE ERREUR TRES REPANDUE
MAIS QU'IL FAUT EVITER. POUR VOUS EN CONVAINCRE, NOUS VOUS
PROPOSONS D'ETUDIER LE PROBLEME DE LA DERIVABILITE DE :

$$F(X) = (X^{**2})\text{SIN}(1/X) \quad \text{SI } X < > 0$$

$$F(0) = 0$$

AU POINT (0,0) SUIVANT VOTRE METHODE PUIS EN CALCULANT LA
LIMITE DU TAUX D'ACCROISSEMENT DE CETTE FONCTION A L'ORIGINE
C'EST-A-DIRE DE REVENIR A LA DEFINITION MEME DE LA DERIVEE.

branchement segment 12

3

commentaire: C'EST REGRETTABLE : REFLECHISSEZ ENCORE QUELQUE TEMPS AVANT DE CHOISIR EN VOUS REPORTANT A VOTRE EXPERIENCE.

2 essais avant commentaire ci-dessous et branchement

segment 12:

CONTRAIREMENT A CE QUI SE PRATIQUE HABITUELLEMENT, IL FALLAIT REpondRE 2. POUR VOUS EN CONVAINCRE, NOUS VOUS PROPOSONS D'ETUDIER LE PROBLEME DE LA DERIVABILITE DE :

$$F(X) = (X^{**2})\text{SIN}(1/X) \quad \text{SI } X < > 0$$

$$F(0) = 0$$

AU POINT (0,0) SUIVANT VOTRE METHODE PUIS EN CALCULANT LA LIMITE DU TAUX D'ACCROISSEMENT DE CETTE FONCTION A L'ORIGINE C'EST-A-DIRE DE REVENIR A LA DEFINITION MEME DE LA DERIVEE.

SEGMENT 12

TEXTE

QUESTION

A VOTRE AVIS QUELLE PROPRIETE LIE LA NOTION DE FONCTION DERIVABLE A CELLE DE FONCTION DIFFERENTIABLE (DANS LE CAS DE FONCTIONS DE R DANS R BIEN ENTENDU) ?

1. (F DERIVABLE EN A) ==> (F DIFFERENTIABLE EN A.)
RECIPROQUE FAUSSE.
2. (F DIFFERENTIABLE EN A) ==> (F DERIVABLE EN A.)
RECIPROQUE FAUSSE.
3. (F DIFFERENTIABLE EN A) <==> (F DERIVABLE EN A)
4. JE NE SAIS PAS

REPONSE CORRECTE ANTICIPEE

3

commentaire: IL S'AGIT EN FAIT , DE DEUX PROPRIETES EQUIVALENTES. IL FAUT CEPENDANT REMARQUER QUE LA NOTION DE FONCTION DIFFERENTIABLE D'UNE PART EST UNE BONNE INTRODUCTION A L'UTILISATION DE LA FORMULE DE TAYLOR ET PERMET D'AUTRE PART DE COMPRENDRE LE ROLE DU NOMBRE DERIVE POUR DETERMINER UNE APPROXIMATION D'UNE FONCTION.

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

1 OU 2

commentaire: VOTRE REPONSE EST INEXACTE. NOUS VOUS CONSEILLONS DE REPRENDRE VOTRE COURS DE TERMINALE POUR APPROFONDIR CES DEUX NOTIONS CAPITALES.

branchement segment 13

4

commentaire: VOTRE MEMOIRE NE SEMBLE PLUS ETRE TRES AU COURANT DE TOUS CES PROBLEMES: NOUS VOUS CONSEILLONS DE REPRENDRE VOTRE COURS DE TERMINALE.

branchement segment 13

SEGMENT 13

TEXTE

QUESTION

QUE REPRESENTE GEOMETRIQUEMENT LE NOMBRE DERIVE DE F EN A (NOTE $F'(A)$) ?

1. L'ACCROISSEMENT DE F.
2. LE COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE.
3. POINT D'INFLEXION.
4. JE NE SAIS PAS.

REPONSE CORRECTE ANTICIPEE

2

commentaire:NOUS IRONS MEME JUSQU'A PENSER QUE VOUS ETES CAPABLE D'ECRIRE L'EQUATION DE LA TANGENTE ! PASSONS PLUTOT A UNE AUTRE QUESTION.

branchement segment 14

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

1

commentaire: VOUS CONFONDEZ SANS DOUTE CE PROBLEME AVEC LA DEFINITION DE $F'(A)$ LIMITE DU TAUX D'ACCROISSEMENT DE F QUAND LA VARIABLE TEND VERS A .
ESSAYEZ ENCORE.

3

commentaire: NOUS NE PARLONS PAS POUR L'INSTANT DE LA DERIVEE SECONDE, MAIS D'UNE PROPPRIETE GEOMETRIQUE DE $F'(A)$.

4

commentaire: CETTE PROPRIETE EST POURTANT LARGEMENT UTILISEE DANS L'ETUDE DES FONCTIONS.
ESSAYEZ ENCORE.

3 essais avant commentaire ci-dessous puis branchement segment 14: $F'(A)$ REPRESENTE LE COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE A LA COURBE D'EQUATION:

$$Y = F(X) \text{ AU POINT } (A, F(A)).$$

SEGMENT 14

TEXTE

QUESTION

UTILISATION DES DERIVEES POUR LA RECHERCHE DES EXTREMA D'UNE FONCTION.

VOUS SAVEZ, PAR EXPERIENCE, QUE L'ON UTILISE FREQUEMMENT LE CALCUL DE LA DERIVEE POUR CE GENRE D'ETUDE, MAIS POUVEZ-VOUS INDIQUER LEQUEL DE CES THEOREMES EST VRAI?

1. ($F''(A) = 0$) \implies (LA COURBE D'EQUATION $Y = F(X)$ ADMET UN EXTREMUM EN $(A, F(A))$).

2. $(F'(A) = 0) \iff$ (LA COURBE D'EQUATION $Y = F(X)$ ADMET UN EXTREMUM EN $(A, F(A))$).

3. $(F'(A) = 0$ ET $F'(X)$ CHANGE DE SIGNE SUIVANT QUE $X < A$ OU $X > A$)
 \iff (LA COURBE D'EQUATION $Y = F(X)$ ADMET UN EXTREMUM EN $(A, F(A))$).

4. $(F'(A) = 0$ ET $F'(X)$ CHANGE DE SIGNE SUIVANT QUE $X < A$ OU $X > A$)
 \iff (LA COURBE D'EQUATION $Y = F(X)$ ADMET UN EXTREMUM EN $(A, F(A))$).

REPONSE CORRECTE ANTICIPEE

4

commentaire: VOUS AVEZ SU EVITER LES PIEGES.

POUR CONFIRMER VOTRE REPONSE NOTEZ A TITRE D'INFORMATION LES EXEMPLES SUIVANTS:

$F(X) = (X^{**3})$: LA DERIVEE S'ANNULE EN ZERO SANS QUE L'ORIGINE SOIT UN EXTREMUM.

$G(X) =$ VALEUR ABSOLUE DE X : L'ORIGINE EST UN MINIMUM MAIS LA DERIVEE N'EXISTE PAS.

TRES BIEN CONTINUONS.

branchement segment 15

1

commentaire: LA DERIVEE SECONDE N'INTERVIENT PAS DANS LA RECHERCHE DES EXTREMA.

2

commentaire: $F(X) = (X^{**3})$: LA DERIVEE S'ANNULE EN ZERO ET CEPENDANT L'ORIGINE N'EST PAS UN EXTREMUM.

3

commentaire: $G(X) =$ VALEUR ABSOLUE DE X ADMET L'ORIGINE POUR MINIMUM ET CEPENDANT LA DERIVEE NE S'ANNULE PAS EN ZERO PUISQU'ELLE N'EXISTE PAS.

3 essais sinon commentaire suivant avant branchement

segment 15: IL FALLAIT REPONDRE 4. CAR LE FAIT QUE LA DERIVEE S'ANNULE EN CHANGEANT DE SIGNE EST UNE CONDITION

SUFFISANTE D'EXISTENCE D'UN EXTREMUM MAIS N'EST PAS UNE
CONDITION NECESSAIRE.

SEGMENT 15

TEXTE

QUESTION

SOIT (C) LA COURBE D'EQUATION $Y = F(X)$ ET M UN POINT.

QUAND DIT ON QUE M EST UN POINT D'INFLEXION DE (C) ?

1. M EST L'ORIGINE DU REPERE.
2. $F'(A) = 0$ ET M A POUR COORDONNEES (A, F(A)).
3. AVEC M: (A, F(A)). $F'''(A)=0$ ET $F''(X)$ CHANGE DE SIGNE SUIVANT QUE $X < A$ OU $X > A$.
4. $F''(A) = 0$ AVEC M:(A, F(A)).
5. M EST LE POINT D'INTERSECTION D'ASYMPTOTES DE (C).

REPONSE CORRECTE ANTICIPEE

3

commentaire: NOUS POUVONS PASSER A UN AUTRE PARAGRAPHE.

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

4

commentaire: CETTE CONDITION EST INSUFFISANTE COMME ON
PEUT LE VERIFIER POUR LA COURBE D'EQUATION: $Y = (X^{**4})$

pour toutes les autres réponses, commentaire:

VOUS AVEZ VRAIMENT INTERET A REVOIR LE COURS D'ANALYSE DE
TERMINALE CAR VOS BASES NE SEMBLANT PAS TRES SOLIDES !

3 essais avant commentaire ci-dessous et branchement

segment 16: PASSONS TOUT DE MEME A UN AUTRE PARAGRAPHE.

SEGMENT 16

TEXTE

* INTEGRATION *

QUESTION

PARMI LES ENSEMBLES SUIVANTS, QUELS SONT CEUX QUI SONT INCLUS DANS L'ENSEMBLE DES FONCTIONS INTEGRABLES SUR L'INTERVALLE FERME (0, 1) ?

- | | | | |
|----|-----------------------------------|----------------|----|
| 1. | ENSEMBLE DES FONCTIONS POLYNOMES. | | |
| 2. | " " " | RATIONNELLES. | |
| 3. | " " " | LOGARITHMES. | |
| 4. | " " " | CONTINUES. | |
| 5. | " " " | EN ESCALIER. | |
| 6. | " " " | EXPONENTIELLES | |
| 7. | " " " | MONOTONES | ET |

DEFINIES SUR (0,1).

VEUILLEZ TAPER LES REPONSES DANS L'ORDRE CROISSANT:

EX: 2, 4, 5, 7

REPONSE ANTICIPEE CORRECTE

1,4,5,6,7

commentaire: TOUTES CES FONCTIONS SONT INTEGRABLES SUR (0,1), MAIS VOUS AVEZ EU RAISON D'EXCLURE LES FONCTIONS RATIONNELLES:

EX: $F(X) = 3/(2*X-1)$

ET LES FONCTIONS LOGARITHMES (PROBLEME A L'ORIGINE).

branchement segment 17

REPONSES INCORRECTES

commentaire: PEUT-ETRE COMMENCEZ-VOUS A VOUS FATIGUER?
CETTE REPONSE N'EST PAS TRES COMPLIQUEE.

**3 essais avec commentaire ci-dessous en cas d'échec
avant branchement segment 17:**

IL FALLAIT REPONDRE 1,4,5,6,7 MAIS EXCLURE LES FONCTIONS
RATIONNELLES

EX: $F(X) = 3/(2*X-1)$

ET LES FONCTIONS LOGARITHMES (PROBLEME A L'ORIGINE).

SEGMENT 17

TEXTE

QUESTION

DANS LE THEOREME DE LA MOYENNE, QUELLE PROPRIETE
DEMANDE-T-ON A LA FONCTION CONSIDEREE ?

SI VOUS NE VOUS SOUVENEZ PLUS DE CE THEOREME TAPEZ:
JE NE SAIS PAS.

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES

CONTINUE / CONTINUITE

commentaire: CE THEOREME EST SOUVENT UTILISE EN ANALYSE
SI VOUS N'ETES PAS CERTAIN DE BIEN LE CONNAITRE, NOUS VOUS
CONSEILLONS DE REVOIR VOTRE COURS DE TERMINALE SUR
L'INTEGRATION.

branchement segment 18

REPONSE INCORRECTE ANTICIPEE

JE NE SAIS PAS

commentaire: NOUS LE REGRETTONS !

IL S'AGIT DE LA CONTINUITE.

CE THEOREME ETANT TRES UTILISE EN ANALYSE, NOUS VOUS
CONSEILLONS VIVEMENT DE REVOIR VOTRE COURS DE TERMINALE
SUR L'INTEGRATION.

branchement segment 18

REPONSES NON ANTICIPEES

commentaire: VEUILLEZ REFORMULER VOTRE REPONSE, OU, POUR CONTINUER TAPEZ SUITE.

en cas de réponse SUITE le commentaire suivant est affiché:

CE THEOREME EST TRES UTILISE EN ANALYSE, NOUS VOUS CONSEILLONS DONC TRES VIVEMENT D'ALLER REVOIR (OU VOIR!) CETTE PROPRIETE DES FONCTIONS CONTINUES DANS VOTRE COURS DE TERMINALE SUR L'INTEGRATION.

branchement segment 18

SEGMENT 18

TEXTE

QUESTION

POUR TOUTE FONCTION F INTEGRABLE SUR L'INTERVALLE BORNE (A,B), EXISTE T'IL AU MOINS UNE FONCTION PRIMITIVE ?
REPONDEZ PAR: OUI, NON, OU JE NE SAIS PAS.

REPONSE CORRECTE ANTICIPEE

NON

commentaire: VOUS AVEZ RAISON

REPONSES INCORRECTES ANTICIPEES

OUI

commentaire: HELAS ! VOTRE REPONSE EST INEXACTE:
PRENEZ PAR EXEMPLE, SUR L'INTERVALLE FERME (-1,+1), LA FONCTION F DEFINIE PAR:

$$F(0) = F(-1) = F(+1)$$

$$F(X) = 1 \text{ SI } -1 < X < 0$$

$$F(X) = 2 \text{ SI } 0 < X < 1$$

VOUS POUVEZ VERIFIER QUE F EST INTEGRABLE SUR (-1,+1), MAIS QU'ELLE N'ADMET PAS DE PRIMITIVE.

branchement segment 19

JE NE SAIS PAS

commentaire: idem ci-dessus

branchement segment 19

SEGMENT 19

TEXTE

NOUS VENONS DE VOIR QUE TOUTE FONCTION INTEGRABLE N'A PAS
NECESSAIREMENT DE PRIMITIVE.

QUELLE PROPRIETE FAUT-IL DEMANDER A F POUR, ETRE CERTAIN
QU'ELLE ADMETTE UNE PRIMITIVE SUR (A,B) ?

REPONSES CORRECTES ANTICIPEES

CONTINUE / CONTINUITE

commentaire: EXACT !

DERIVABLE / DERIVABILITE

commentaire: EXACT MAIS IL SUFFIT EN FAIT QUE F SOIT
CONTINUE SUR (A,B).

branchement segment 20

REPONSE INCORRECTE ANTICIPEE

INTEGRABLE

commentaire: FAUX

REPONSES NON ANTICIPEES

commentaire: REFORMULEZ VOTRE REPONSE S.V.P.
OU, POUR CONTINUER, TAPEZ SUITE.

3 essais avant branchement segment 20 avec

commentaire en cas d'échec ou en cas de réponse SUITE:
TOUTE FONCTION CONTINUE SUR (A,B) ADMET AU MOINS UNE
PRIMITIVE.

SEGMENT 20

TEXTE

POUR TERMINER CE TRAVAIL, POURRIEZ-VOUS NOUS INDIQUER LES
DIFFERENTES UTILISATIONS DU CALCUL INTEGRAL QUE VOUS AVEZ
DEJA RENCONTREES.

NOUS ENREGISTRERONS VOS PROPOSITIONS. POUR CELA ECRIVEZ VOS
EXEMPLES LE PLUS SIMPLEMENT POSSIBLE:

EX: AIRE...OU BIEN JE NE SAIS PAS

REPONSE INCORRECTE ANTICIPEE

JE NE SAIS PAS

commentaire: VOICI QUELQUES EXEMPLES D'UTILISATION DU
CALCUL INTEGRAL:

CALCUL D'AIRES, DE VOLUMES, CENTRES DE GRAVITE, MOMENTS
D'INERTIE.

branchement segment 21

AUTRES REPONSES

commentaire: MERCI POUR VOS IDEES.

POUR CONTINUER TAPER SUITE.

branchement segment 21

SEGMENT 21

TEXTE

NOUS ESPERONS VOUS AVOIR PERMIS DE REMARQUER TOUS LES
DETAILS OU LES NOTIONS ENCORE OBSCURES PQR VOUS.

N'HESITEZ PAS A REVOIR DE PLUS PRES VOTRE COURS, A CONSULTER
QUELQUES OUVRAGES SUR L'ETUDE DES FONCTIONS NUMERIQUES OU A
DEMANDER DES PRECISIONS A VOS PROFESSEURS.

MERCI.

III.3.

Um didacticiel
sur les nombres complexes
avec
PLATO™
- :: :: -

III.3.1 PRESENTATION DU SUPPORT

III.3.1.1 Pourquoi PLATO™ ?

Le but du projet était de créer un prototype de cours de mathématiques sur ordinateur, cours de type "tutoriel" (même si les aspects "cours magistral" y sont encore très forts), dirions-nous aujourd'hui, tel que l'on concevait l'E.A.O. au début des années '80.

PLATO™ avait été choisi, à mon retour des Etats-Unis, sur mon conseil et sur celui de Jacques WEBER, parce qu'il nous semblait alors le seul outil informatique susceptible de répondre aux exigences d'un enseignement individualisé en mathématiques. Après mes expériences plus ou moins satisfaisantes avec l'informatique "scolaire", MITSU™ et DECAL™ en particulier, j'avais été séduit par PLATO™. Il avait tout d'abord l'avantage incomparable d'avoir été conçu par des enseignants, pendant les années '60, à l'Université d'URBANA (où j'ai eu la chance d'aller rencontrer pendant l'été 1980 certains membres de l'équipe de création), en ILLINOIS, puis construit par CONTROL DATA. La démarche était donc l'inverse de ce que je connaissais : il n'était pas nécessaire de se plier aux contraintes de l'informatique pour essayer de détourner vers l'enseignement des ordinateurs. Au contraire, des informaticiens avaient réussi à créer un objet dédié à l'enseignement : touches de fonctions, écran "plasma" sensible au toucher du doigt, très haute résolution de l'écran graphique et, pour couronner le tout, un langage *ad hoc*, baptisé TUTOR™ (évidemment!).

Parmi les premiers logiciels qui me furent montrés, il y avait WEST, qui est encore de nos jours l'un des paradigmes des tutoriels dits "intelligents" (j'y reviens dans le chapitre IV sur l'Intelligence Artificielle), et une simulation interactive de distillation en chimie (DISTILL) avec possibilité de faire varier les dosages, la température, ..., jusqu'à l'explosion - inoffensive- de l'installation, mais aussi avec des représentations graphiques de la variation des paramètres principaux.

TUTOR™, hélas, est un langage de programmation qui, avec plus de 300 commandes, a toujours été réservé à un petit nombre d'initiés. Mais il permettait de pouvoir -enfin- créer des didacticiels dignes de ce nom et de gérer, ensuite, le travail d'un très grand nombre d'étudiants.

A cette époque CONTROL DATA n'avait pas encore mis sur le marché de version "micro" de PLATO™; il fallait donc fonctionner à partir d'un serveur, situé en Belgique. Cela posait

un problème, évidemment : comment pouvait-on prendre le risque d'aller mettre nos programmes à l'étranger ? ! En fait, l'autre grande force de PLATO™, et l'avantage d'un "gros" serveur (auquel nous revenons maintenant avec le développement de la télématique), est l'immense bibliothèque de programmes (près de 5000 heures de didacticiels sur presque tous les sujets). Hélas, CONTROL DATA n'a jamais daigné investir dans une véritable politique d'ouverture de son système vers la micro-informatique. Les premières versions micro-PLATO™ étaient pourvues d'un système-auteur qui pouvait rivaliser avec les plus mauvais du genre; on ne pouvait même pas utiliser des réponses numériques, l'ordinateur ne savait plus que 2+2 font 4 !

III.3.1.2 Les particularités de PLATO™ et de TUTOR™

Je ne retiendrai ici que les éléments les plus importants de ce système et de son langage en vue de comprendre ce qui faisait leur avance...en 1970, et combien je regrette que leurs constructeurs l'aient, de fait, perdue.

Comme le lecteur pourra s'en convaincre en regardant la figure III.7 (et les autres de ce sous-chapitre), PLATO™ permet une mise en page excellente, un graphisme très fin (qui fait penser à celui du MacIntosh™), et l'emploi de polices de caractères de différentes tailles, comportant tous les alphabets classiques et tous les symboles mathématiques usuels. TUTOR™ permet aussi la création et la gestion de caractères particuliers. Comme je l'ai déjà signalé, l'écran est tactile; l'utilisateur a donc la possibilité de communiquer avec l'ordinateur simplement en appuyant son doigt sur l'écran. On peut ainsi construire tout un programme utilisable sans le recours au clavier. Un grand hôpital parisien avait d'ailleurs installé dans une salle d'attente, en libre service, un terminal PLATO™ avec un logiciel sur les risques du tabac où le (futur) malade pouvait indiquer sa consommation quotidienne de cigarettes, son poids, son âge,..., et voyait alors, par quelques histogrammes et dessins anatomiques, son futur se dessiner (ou se noircir!). Cette possibilité a été souvent utilisée pour des logiciels s'adressant à des jeunes enfants ou des personnes ayant des difficultés à orthographier correctement leurs réponses (sur un clavier).

TUTOR™ autorise l'activation à tout moment des touches de fonction, au choix de l'enseignant avec, s'il le souhaite, apparition à l'écran des touches actives pour chaque page : page suivante, page précédente, retour au menu principal, pages d'aide.

TUTOR™ a aussi de très grandes possibilités d'animation graphique et de simulation. Je pense que l'on doit à ce système les premières simulations professionnelles (conduite d'avion en particulier) qui requièrent évidemment de l'ordinateur une gestion rapide du graphisme et une très grande capacité de calcul. Sur ce dernier point, j'étais comblé. TUTOR™ connaît bien les mathématiques usuelles (et peut apprendre facilement les autres) et sait les utiliser, tracer des courbes, faire des calculs à l'intérieur des leçons,... L'affichage à l'écran se faisait

un peu sous la forme de ce que nous connaissons aujourd'hui sous le terme "fenêtrage", c'est-à-dire que PLATO™ ne fonctionnait pas par déroulement linéaire d'écrans mais par "animation": on pouvait faire apparaître des textes, des graphismes, partout sur l'écran et dans n'importe quel ordre. On pouvait tout aussi bien gérer des "dessins animés", comme WEST ou DISTILL avaient su me le prouver.

TUTOR™ est aussi conçu pour permettre le suivi des étudiants en apprentissage sur des leçons PLATO™. L'organisation du réseau mondial PLATO™ est très performante et, encore de nos jours, aux Etats-Unis principalement, des universités profitent de l'immense banque de logiciels qui s'est construite depuis plus de 20 ans.

A part cela, TUTOR™ possède toutes les fonctionnalités classiques des langages-auteurs : analyse de réponse (chaînes de caractères, valeurs numériques, mots-clefs avec acceptation éventuelle de variation de l'orthographe,...), enchaînements conditionnels, compteurs de passages à certains points du programme,...

III.3.2 PRESENTATION DU PROJET

III.3.2.1 Le public

Les cours envisagés visaient un public large, plutôt en provenance de la formation continue, travaillant en autonomie. L'E.S.I.E.E. souhaitait pouvoir offrir des formations préparatoires, de type remise à niveau, à des techniciens supérieurs désireux de suivre ensuite des études d'ingénieurs.

III.3.2.2 Les moyens d'apprentissage

A cette époque (début des années '80), l'E.A.O. représentait encore une porte privilégiée pour la formation individuelle. Mais cette formation était envisagée comme monomédia : nous attendions de l'ordinateur qu'il assume à lui seul les tâches de : dispensateur des connaissances, aide à l'apprentissage, évaluateur des connaissances et des apprentissages.

III.3.2.3 Les thèmes

J'avais fait accepter l'idée de créer des cours sur des thèmes pouvant mettre en évidence les possibilités ou les contraintes de PLATO™ pour l'enseignement des mathématiques. Ainsi furent retenus : les nombres complexes, j'indiquerai ensuite les raisons de ce choix, les équations du second degré à coefficients réels (et complexes), les systèmes d'équations linéaires du premier degré et les puissances de 10.

III.3.3 UN DIDACTICIEL D'INTRODUCTION AUX NOMBRES COMPLEXES

III.3.3.1 Les raisons du choix

J'avais choisi les nombres complexes pour les raisons suivantes :

- ils font partie des curiosités mathématiques qui ont tenu en haleine les mathématiciens pendant des siècles et qui ont plongé leurs racines (!) dans des réflexions philosophiques importantes,

- ils permettent différentes présentations,

- ils nécessitent un recours à des figures géométriques,

- ils introduisent des calculs non traitables directement par le système (contrairement aux fonctions classiques),

- et, accessoirement, une certaine habitude fait qu'on les écrit, sous forme trigonométrique, avec des lettres grecques (et aussi que π intervient souvent).

La dernière raison est que j'ai toujours beaucoup aimé enseigner les nombres complexes !

III.3.3.2 Création et réalisation

J'ai construit ce cours à distance ! Je travaillais alors en Tunisie et la société qui était chargée d'implanter mon cours sur PLATO™, EUROFORMATIQUE, était près de Paris. Nous avons quand même réussi à produire un didacticiel "tournant" bien et mettant en valeur les possibilités du système.

La confrontation entre mes désirs (mes rêves?) de pédagogue et les possibilités des informaticiens (problème surtout de temps de réalisation) m'a laissé de bons souvenirs, en particulier la discussion sur l'apprentissage, par le système, du calcul du produit de deux nombres complexes ou de la formule de Moivre !

III.3.3.3 Présentation du cours

III.3.3.3.1 Plan du cours

Première partie : présentation algébrique

- historique des nombres complexes

- écriture $a+ib$ (a et b réels)

- manipulation partie réelle, partie imaginaire

- addition

- soustraction

- multiplication

- division

- conjugaison

Deuxième partie : présentation trigonométrique

- le plan complexe
- image/affiche
- module/argument
- opérations algébriques
- formule de Moivre

Troisième partie : résolution d'équations du second degré

Quatrième partie : notation exponentielle

- définition
- opérations
- formule d'Euler
- applications

Cinquième partie : exercices de révision

III.3.3.3.2 Quelques particularités

A titre expérimental, j'avais souhaité concrétiser quelques idées à l'occasion de ce travail sur l'ordinateur de mes rêves.

Le cours se concevant comme autonome et destiné à un travail individuel, j'avais introduit une aide permanente au niveau du vocabulaire, puisque j'étais (et je le suis toujours) convaincu qu'une source importante de difficulté en mathématiques est l'incompréhension, pour l'apprenant, des mots utilisés par l'enseignant. Cette aide était disponible par simple toucher du mot inconnu; alors, si celui-ci faisait partie du lexique, une page écran apparaissait avec la définition et, éventuellement des remarques et des informations complémentaires. De courtes notices biographiques sur les mathématiciens cités dans la partie historique ou dont les noms sont attachés à des propriétés mathématiques, étaient accessibles de la même manière. Pratiquement, cela représentait un gros travail pour les réalisateurs car, pour chaque mot du lexique et pour toutes ses occurrences dans le cours, devait être créée à l'écran une zone tactile sensible.

Aujourd'hui HyperCard™ résout ce problème fort simplement...mais l'idée me semble toujours aussi intéressante.

Le cours étant principalement destiné à des adultes, techniciens supérieurs, se destinant à des études d'ingénieurs, j'ai eu l'idée de laisser choisir l'utilisateur entre les symboles i et j, ce dernier étant souvent utilisé en sciences physiques (cf. fig.III.7).

Par la même occasion, le lecteur ne manquera pas de remarquer, sur la figure III.8, que j'avais cédé à la mode "informatisante" de l'époque et avais opté pour le "ø" au lieu du "0".

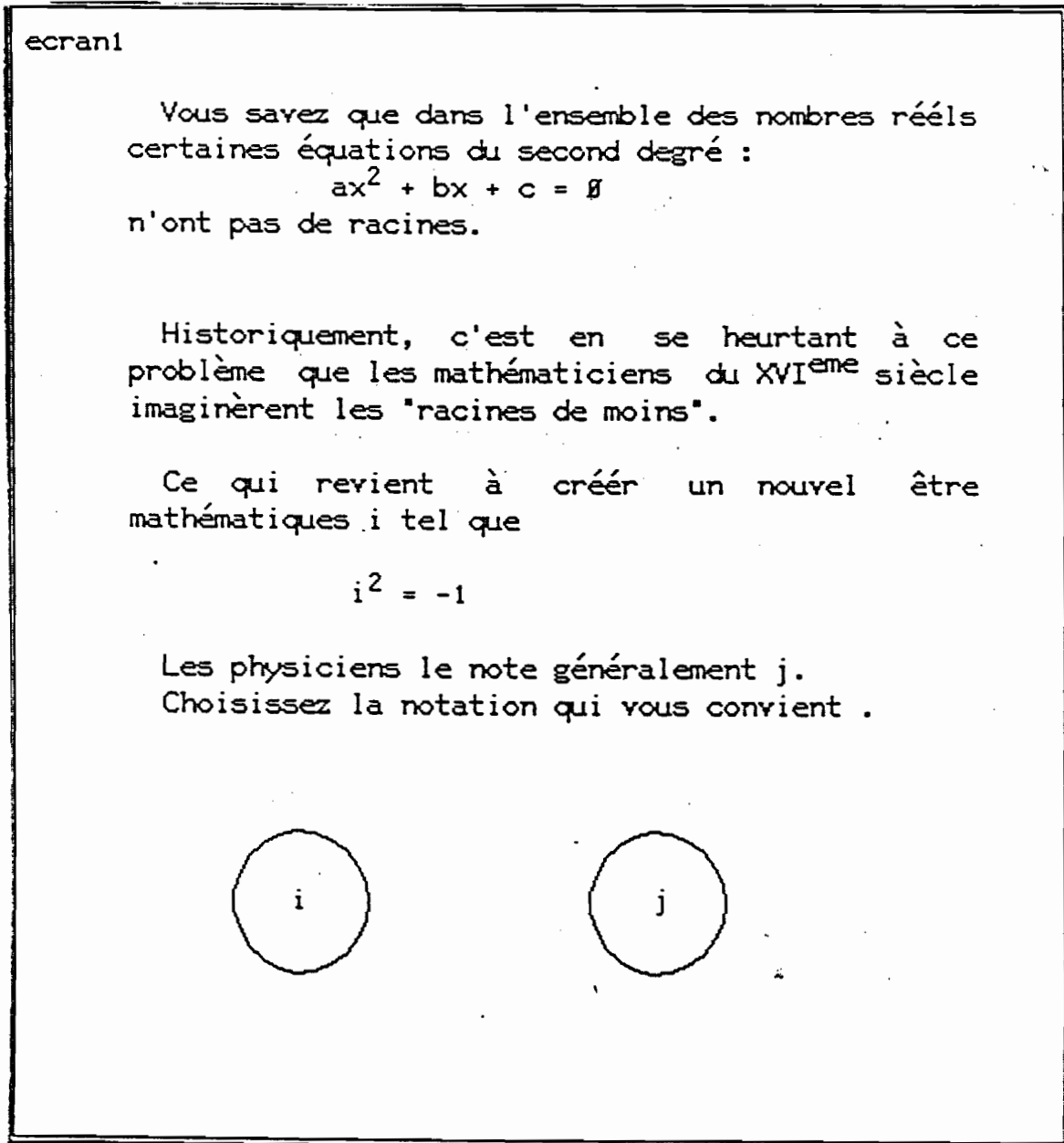


fig. III.7 : Exemple de page écran avec deux zones tactiles
(et quelques fautes d'orthographe!)

Afin de différencier les parcours de lecture et ceux d'apprentissage, la plupart des démonstrations étaient facultatives (exemple : fig.III.8/9). Pour la même raison, le nombre d'exercices proposés après chaque nouvelle notion dépendait du nombre d'erreurs. Pour certaines notions, l'étudiant pouvait opter pour des exercices (simples) avant d'entrer dans le détail des propriétés de cette notion (par exemple pour la formule de Moivre).

ecran28 NEXT BACK SHIFT-BACK HELP DATA

Propriété n° 4

Le conjugué du rapport de deux nombres complexes

Intéressons-nous au rapport :

$$X = \frac{1-5i}{3+2i} = \frac{(1-5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i-15i+10i^2}{9+4}$$
$$= \frac{-7-17i}{13} = \frac{-7}{13} + \frac{17}{13}i = -\frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$$

Puisque $\overline{1-5i} = 1+5i$ et $\overline{3+2i} = 3-2i$
On voit que :

$$\frac{\overline{1-5i}}{\overline{3+2i}} = \frac{1+5i}{3-2i} = \frac{(1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+15i+10i^2}{9+4}$$
$$= -\frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$$

Le conjugué du rapport de deux nombres complexes est égal au rapport des conjugués de ces nombres. (le dénominateur étant non nul).

Appuyer sur DATA pour avoir une démonstration ou sur l'une des touches de fonction actives

fig. III.8 : Exemple de page écran avec possibilité de démonstration

Les commentaires variaient aussi en fonction du nombre d'essais à l'intérieur d'un même exercice; mais je n'avais pas (encore) introduit ce que j'appelle une "prise en compte des erreurs commises"; j'essayais, tout simplement, de faire produire par l'apprenant "la" bonne réponse.

demo28 NEXT BACK SHIFT-BACK HELP

Démonstration :

Soient z et z' deux nombres complexes
 z' étant non nul.


$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z \times \overline{z'}}}{\overline{z' \times \overline{z'}}} = \frac{1}{z' \overline{z'}} \times \overline{(z \overline{z'})} = \frac{1}{z' \overline{z'}} \times \overline{z} \overline{\overline{z'}}$$
$$= \frac{\overline{z} \overline{z'}}{z' \overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

On vient de démontrer que le conjugué du rapport de deux nombres complexes est égal au rapport des conjugués de ces nombres.

fig. III.9 : Exemple de page de démonstration

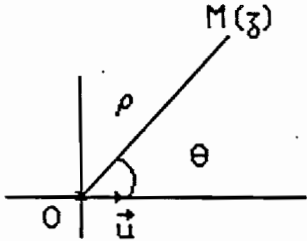
Le graphisme avait été particulièrement soigné, tant pour la mise en page et pour les écritures, respectant presque parfaitement les traditions des manuels scolaires, que pour les figures (cf. fig.III.10).

trigo3 **NEXT BACK SHIFT-BACK HELP**



ATTENTION

$z = [\rho, \theta]$ est la forme trigonométrique de tout nombre complexe NON NUL



Si $z = 0$: LE MODULE de z est NUL.
 L'ARGUMENT de z N'EXISTE PAS !!!
 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Si $z \neq 0$:

$\arg(z)$ est UNE mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{OM})

$\arg(z) = \theta$	on écrit donc :	
ou $\arg(z) = \theta + 2\pi$	$\arg(z) = \theta \pm 2k\pi$	
ou $\arg(z) = \theta - 2\pi$		
ou $\arg(z) = \theta + 2 \times 2\pi$		avec $k \in \mathbb{N}$
ou $\arg(z) = \theta + 3 \times 2\pi$		

fig. III.10 : Exemple de page écran avec graphisme

J'ai aussi beaucoup essayé de profiter des possibilités d'animation en particulier pour attirer l'attention de l'apprenant (cf. fig.III.11) ou pour lui faire voir des relations entre objets ou, encore plus intéressant, pour lui montrer des variations d'objets géométriques en fonction de la variation de paramètres algébriques (cf. fig.III.12).

NEXT BACK SHIFT-BACK HELP

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = B$$

$x^2 + \frac{x}{2}$ peut être considéré comme le début du développement d'un carré :

$$(x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$
$$x^2 + \frac{x}{2}$$

Il faudrait avoir $2\alpha = \frac{1}{2}$
donc $\alpha = \frac{1}{4}$

Regardons : $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x + (\frac{1}{4})^2$
 $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$
 $(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} = x^2 + \frac{x}{2}$

Remplaçons dans l'équation de départ l'expression de $x^2 + \frac{x}{2}$ que nous venons de trouver.

fig. III.11 : Exemple de page écran devant attirer l'attention de l'apprenant

Un dernier point qui me semble, a posteriori, original, est que, dans les logiciels construits, j'avais obtenu des informaticiens qu'ils mettent en place des éléments de calcul "réel", c'est-à-dire que les réponses à certaines questions, par exemple les opérations sur les nombres complexes ou les résolutions de systèmes d'équation, soient produites par TUTOR™ et non pas fournies par l'auteur du programme.

Comme Monsieur JOURDAIN avec sa prose, je faisais déjà un peu d'Intelligence Artificielle sans le savoir, en introduisant dans la machine des connaissances sur le domaine qu'elle était supposée enseigner.

trigol

NEXT BACK SHIFT BACK HELP

$z = a + ib$ \mathbb{C} (a, b) \mathbb{R}

$M(a, b)$ ou $M[\rho, \theta]$????

Autre représentation!!

Soit le point M, image de z , il est caractérisé par :

- * le module du vecteur \vec{OM}
- * une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{OM}) exprimée en radians

Définitions:

- * On appelle "module de z ": $|z|$, noté ρ , le module du vecteur OM .
- * On appelle "argument de z ": $\arg(z)$, noté θ une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{OM}) , exprimée en radians.

$z = [\rho, \theta]$ est la forme trigonométrique de z

fig. III.12 : Exemple de page écran avec animation

III.3.3.4 Quelques remarques pour conclure

Des difficultés d'ordre juridique et administratif, entre les deux organismes impliqués dans ce développement, ne m'ont pas permis de mener à bien l'expérimentation avec un échantillon du public cible (ni même de voir fonctionner le didacticiel sur les systèmes d'équations). CONTROL DATA devait transposer sur son micro-PLATO™ ce programme pour le valider...j'attends encore de savoir si quelqu'un, quelque part, a utilisé ce travail et, comme je le souhaitais sur la page d'accueil, a commencé ou a recommencé "à aimer un peu plus les mathématiques".

Pour moi, ce fut la réalisation d'un rêve : créer un didacticiel sur PLATO™ et le voir fonctionner après avoir essayé de profiter au maximum de ses possibilités pour l'apprentissage. Je pense avoir réussi pour ce qui est du graphisme, de l'animation, des capacités de calcul; en revanche, en regardant avec plus de six ans de recul mon travail, j'y vois beaucoup de directivité et peu d'interactivité, celle-ci se limitant le plus souvent, pour l'apprenant, à choisir entre en faire le maximum et en faire le minimum ! Je n'y trouve pas beaucoup non plus de traces d'une réelle prise en compte des caractéristiques du public : adulte et technicien.

De plus, ce fut, involontairement, grâce à cette expérience que je me retrouvai quatre ans plus tard avec mes collègues de la Télé-université du Québec : ils étaient alors les plus importants utilisateurs de PLATO™ au Canada, avec un réseau mobile de terminaux irriguant presque tout le Québec. J'avais donc eu l'occasion, à plusieurs reprises, d'aller leur rendre visite et de les recevoir pour envisager des collaborations de développement de logiciels en français. C'est aussi parce que, pour la première fois, j'avais eu à réfléchir au "design" d'un produit pédagogique destiné à des adultes en formation individuelle...ce qui fut une bonne approche de l'enseignement à distance...

III.4

Un diagnostic d'erreurs sur les fractions

avec
MICRAL

- :: :: -

III.4.1 L'HISTORIQUE DE LA RECHERCHE

III.4.1.1 Une évaluation à l'entrée dans l'enseignement supérieur

Ce travail prend ses racines dans un souci d'avoir, pour l'entrée au C.N.A.M. et à l'université, via l'Examen Spécial d'Entrée à l'Université (E.S.E.U.), des tests assistés par ordinateur (T.A.O.) en mathématiques pour, rapidement et efficacement, pouvoir établir le niveau de connaissances des adultes concernés. En effet connaître le niveau de leur dernière scolarisation n'est pas suffisant, certains ayant arrêté leurs études un an auparavant, d'autres il y a plus de 10 voire 15 ans.

Dans le cadre d'une recherche commune entre le C.R.E.E.M., dirigé par Jérôme CHATENET de GERY, et une équipe de l'U.E.R. de Didactique des Disciplines de Paris 7, sous la responsabilité scientifique de Daniel LACOMBE, nous avons élaboré une méthodologie de construction de tels tests. Une synthèse de ce travail est donnée dans <CHA85>.

III.4.1.2 L'intérêt des T.A.O.

Nous avons très clairement conscience des avantages et des contraintes de l'informatique pour la passation de tests de connaissances.

Pour les avantages :

- traiter rapidement un très grand nombre de candidats (préoccupation identique à celle de l'E.S.I.E.E. sauf qu'ici il ne s'agissait pas d'un concours mais d'un repérage de niveau de connaissances),

- adapter le test au fur et à mesure de l'estimation du niveau de l'étudiant (ne pas lui poser pendant 10 minutes des questions trop faciles et lassantes, ou, a contrario, le laisser désespéré et paniqué devant des questions trop difficiles),

- assurer une (certaine) objectivité dans l'évaluation,

- diminuer les aspects "affectifs" de la passation d'une épreuve en évitant le "face à face" avec un enseignant ou l'angoisse de la feuille blanche,

- avoir accès à des statistiques sur l'ensemble de la population testée pour définir les points à traiter prioritairement dans l'enseignement qui suivra.

Pour les inconvénients :

- le coût de la création des tests,
- le coût de la passation (avoir un parc assez important de terminaux ou de postes autonomes pour ne pas étaler le test sur une trop grande période et craindre des effets parasites de "copiage" par bouche à oreille),
- l'appréhension de certains étudiants devant un média inconnu ou peu familier, et les difficultés liées à l'utilisation d'un clavier.

III.4.1.3 Le projet dans son ensemble

Notre projet visait la création d'une banque ramifiée de T.A.O. dans laquelle l'étudiant serait dirigé, en fonction de ses réponses, et qui obtiendrait, en bout de course, une évaluation de son niveau de connaissances avec un diagnostic de ses principales incompréhensions et lacunes. Cette vision, bien qu'utopique, a cependant débouché sur la réalisation concrète d'une série d'exercices sur micro-ordinateurs, utilisés encore maintenant au C.N.A.M. et à Paris 7 et donnant satisfaction aux enseignants pour l'organisation de groupes de niveau pour les premiers cours de préparation à l'entrée dans l'enseignement supérieur.

III.4.2 METHODOLOGIE DE CONSTRUCTION DE T.A.O.

III.4.2.1 Objectifs généraux

L'une des premières tâches de l'équipe fut de définir une méthodologie de construction de tels T.A.O..

Les idées principales qui furent retenues sont :

- être capable de repérer les erreurs dues à des incompréhensions profondes du domaine; ces incompréhensions pouvant être associées soit à des lacunes dans l'ensemble des connaissances associées au domaine, soit à des connaissances erronées ou "déviées" obtenues à partir de propriétés correctes du domaine,
- pour répondre au point précédent :
 - * connaître ces erreurs (celles réellement produites par des apprenants),
 - * créer des questions susceptibles de faire apparaître ces erreurs si elles sont (potentiellement) dans l'esprit de l'étudiant,
- définir le réseau des connaissances à tester et le(s) cheminement(s) à suivre pour dresser un bilan des connaissances utilisable pour un diagnostic en vue de :

- * situer l'étudiant par rapport aux autres et l'inscrire dans un groupe d'étudiants de même niveau,
- * fournir à l'étudiant une liste de concepts à étudier ou à revoir.

III.4.2.2 L'utilité d'enquêtes

Pour obtenir des informations pertinentes et fiables sur l'état des erreurs possibles et sur les conditions d'apparition de celles-ci (à savoir, quels types de questions utiliser), nous avons décidé d'avoir recours à des enquêtes papier-crayon à grande échelle auprès des populations-cibles. En ayant des populations numériquement importantes nous avons la possibilité de comparer diverses variantes et d'étudier ainsi l'effet de la variation de plusieurs paramètres (valeurs numériques, formulation,...).

III.4.3 UN LOGICIEL SUR LE CALCUL DES FRACTIONS

L'exemple que je donne ici porte sur le diagnostic d'erreurs dans le calcul sur les fractions. Je reviendrai sur cette question au chapitre consacré aux erreurs et à l'Intelligence Artificielle, et à la suite que j'ai donnée à cette étude.

III.4.3.1 L'enquête sur les fractions

Dans le cadre de ce que j'ai présenté au paragraphe précédent, nous avons lancé, en 1983, une vaste enquête sur les fractions auprès de 150 classes françaises (collèges, lycées professionnels et lycées ordinaires). Nous avons ainsi recueilli près de 3000 copies. Le compte rendu détaillé de cette enquête se trouve dans <DUM84c>. Je développe les principaux résultats dans le chapitre V sur les erreurs et l'Intelligence Artificielle. Le dépouillement de cette enquête nous permet de repérer les erreurs principalement produites et d'établir pour chacune d'entre elles un taux d'apparition, voire, le cas échéant, les facteurs favorisant cette apparition.

III.4.3.2 La maquette sur MICRAL

A partir des résultats obtenus à la suite de cette enquête, nous avons choisi de construire une première maquette avec des exercices de type "simplifications piégées", pour lequel nous avons mis en évidence un très grand nombre d'erreurs et une assez grande variété dans les cheminements possibles.

Il s'agit d'exercices de la forme $(X+Y)/(X+Z)$.

Pour permettre un diagnostic plus rapide nous n'avons utilisé dans notre enquête que des valeurs numériques, pour X, Y et Z, telles que, autant que faire se peut, deux cheminements erronés distincts ne produisent pas le même résultat. A titre d'illustration, les différentes réponses attendues dans le cas particulier de $(6900+63)/(1400+63)$ figurent dans le schéma de la figure III.13 .

La maquette ne comporte que deux exercices :

$$\frac{6400 + 17}{1300 + 17} \quad \text{et} \quad \frac{99 + 1515}{55 + 1515}$$

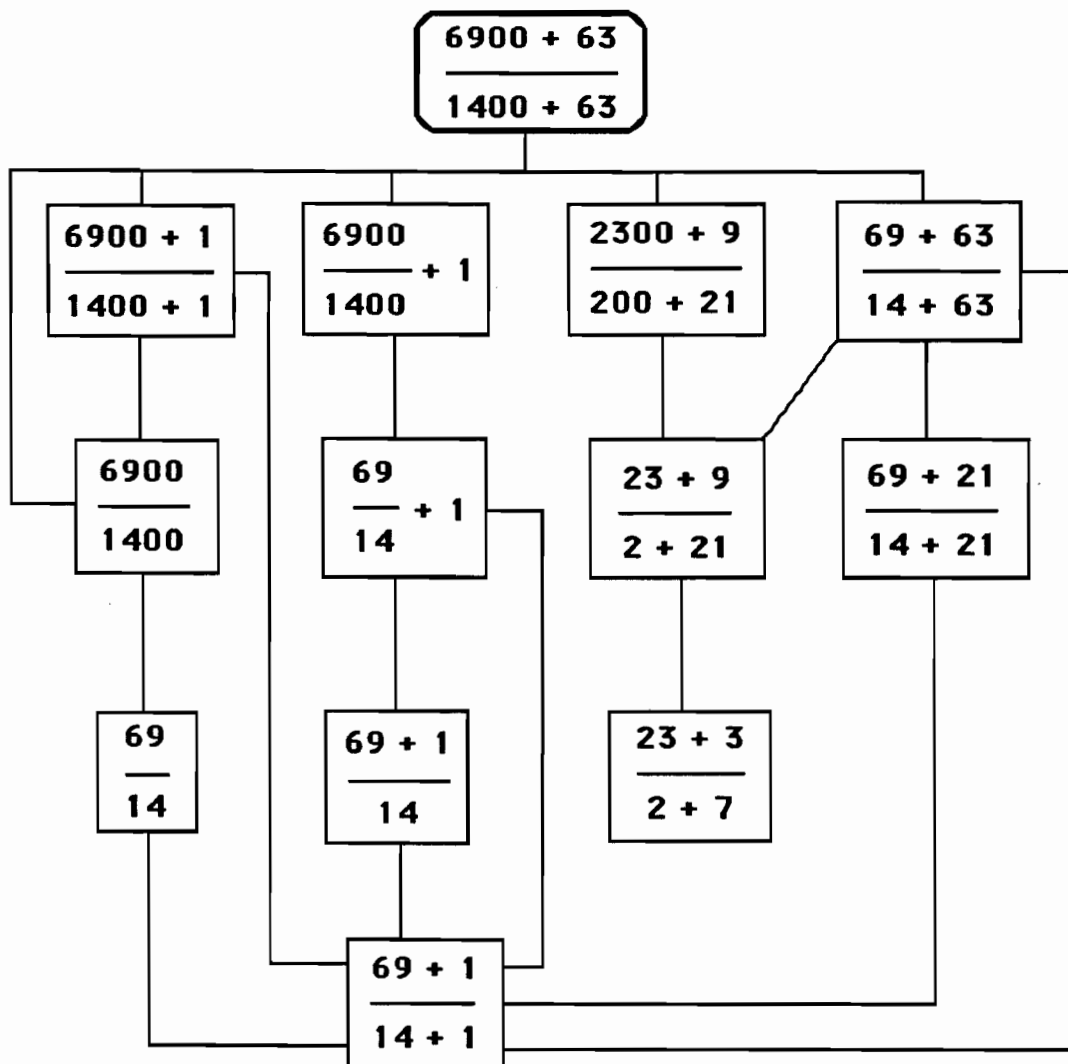


fig.III.13 : Résultats attendus pour la fraction $(6900+63)/(1400+63)$

J'ai construit cette maquette en basic sur Micral-80-22G avec des sous-programmes de création et de gestion de pages, écrits par Serge HOCQUENGHEM, s'inspirant de notre document "Propositions en vue de la réalisation d'un logiciel d'affichage et de gestion d'écran pour des exercices de mathématiques assistés par ordinateur (mode création et mode réponse)" <HOC83>. Le programme central est capable d'afficher les pages demandées et de gérer les réponses fournies par l'élève, comme pour un E.A.O. usuel, suivant l'organigramme donné à la page suivante (fig.III.14) et analysé ci-dessous.

Les fractions apparaissent à l'écran sous la forme traditionnelle aussi bien pour les textes prévus par les auteurs que pour la réponse de l'élève; celui-ci pouvant, lorsqu'il "a la main", répondre "IMPOSSIBLE" (par exemple s'il trouvait un zéro au dénominateur, ou pour des raisons non mathématiques comme l'incapacité à répondre !), proposer un nombre entier ou une fraction. Dans ce dernier cas, il écrit d'abord le numérateur (sans caractères autres que des chiffres, le signe étant placé en tête de la fraction) puis le dénominateur; la taille de la barre de fraction tient compte des nombres entrés par l'élève.

La première étape a pour objectif de familiariser l'apprenant avec la manipulation du clavier et avec des questions de forme (comment écrire un entier sous forme "standard" -signe, refus de la virgule même pour une écriture comme "3,0",...- ou une fraction avec notre logiciel) et de fond (rappels sur "fractions", "écriture fractionnaire", "écriture fractionnaire irréductible", possibilité de répondre "impossible"). Ces problèmes avaient d'ailleurs soulevé, dans l'équipe de conception, des discussions extrêmement animées; notre récente enquête, grâce à un questionnaire destiné aux enseignants, met en évidence que l'unanimité est loin d'être réelle sur le vocabulaire utilisé dans les collèges en 1988 (voir plus loin les premiers résultats de cette seconde enquête).

A la seconde étape le premier exercice est proposé à l'élève (le déroulement du programme est, à certaines variations près qui seront précisées au fur et à mesure, identique pour les deux exercices).

Il lui est demandé de calculer cette fraction et de donner sa réponse sous forme de l'écriture "standard" d'un entier ou d'une écriture fractionnaire irréductible. Le logiciel vérifie la correction de la syntaxe de la réponse; en cas d'incorrection un message explicatif est fourni et le programme redonne la main à l'élève; 5 essais sont autorisés avant la sortie définitive. Il peut aussi répondre "IMPOSSIBLE"; dans ce cas la première fois l'élève est invité à mieux réfléchir et à répondre à nouveau après qu'on lui a signalé qu'il est possible de calculer $(6400+17)$ et $(1300+17)$ et donc d'en calculer le rapport. En cas de récurrence et s'il était au premier exercice, il a le choix entre passer au second exercice ou sortir.

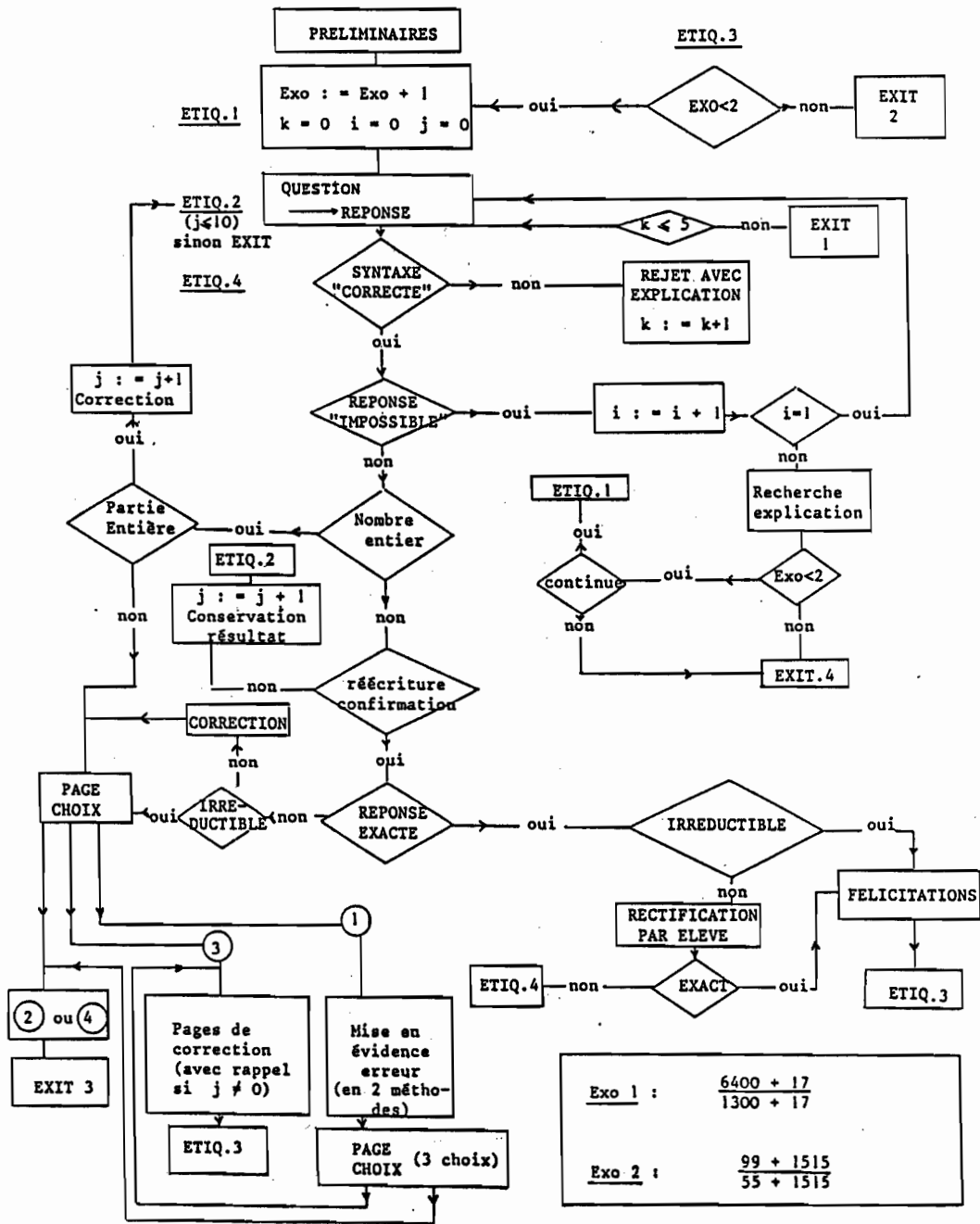


fig.III.14 : Organigramme du programme FRACT-0

Si l'élève répond par un entier le programme compare cette valeur à la partie entière de la fraction de l'exercice : en cas d'égalité un message lui rappelle qu'il ne lui est pas demandé une valeur approchée de la fraction, et la question initiale est reposée. En cas d'inégalité, le programme se place aux "pages-choix" que je détaille ci-dessous.

Si l'élève répond en proposant une écriture fractionnaire le programme lui demande de confirmer sa réponse sur les deux points suivants :

- > cette fraction est égale à celle de l'énoncé,
- > cette écriture fractionnaire est irréductible.

L'élève peut alors revenir sur sa réponse et en donner une autre. Cette réponse est néanmoins conservée pour une analyse ultérieure (un maximum de 10 essais était prévu).

Après acceptation le programme vérifie par le produit en croix l'exactitude de cette réponse.

Si la réponse est exacte et l'écriture irréductible l'élève passe au second exercice ou sort.

Si la réponse est exacte mais l'écriture réductible l'élève est averti de la situation et invité à fournir une réponse simplifiée.

Si la réponse est inexacte mais l'écriture réductible, le programme fournit à l'élève la forme irréductible puis les "pages-choix"; celles-ci lui sont directement proposées dans le cas contraire.

Ces pages sont au cœur du logiciel : l'élève se voit présenter une page-écran comportant "notre" développement du calcul, correct mais non présenté comme tel (METAFRAC, logiciel construit actuellement par l'équipe de Daniel LACOMBE à Paris 7, opte pour une personnalisation du type : "Albert a trouvé...").

Ensuite, le programme demande à l'élève de faire un choix parmi quatre possibilités (notation: F = fraction de départ, R = réponse de la "machine", E = réponse de l'élève) :

- (1) R et E sont toutes les deux correctes
- (2) les réponses R et E sont fausses
- (3) R est correcte et E est fausse
- (4) R est fausse et E est correcte.

Pour les choix (2) ou (4) l'élève est renvoyé à son cours ou vers son professeur.

Pour le choix (3), et dans le cas où l'erreur commise (ou plus précisément l'enchaînement de règles vraies et fausses) correspond à l'une de celles préalablement prévues par les concepteurs, l'élève reçoit des pages de correction adaptées. De même pour toutes les solutions intermédiaires qu'il a pu donner avant de décider de son choix définitif. En fait,

pour chaque chemin erroné repéré, le programme demande à l'élève s'il reconnaît sa démarche avant de lui proposer des pages de correction.

Si l'erreur n'est pas prévue ou s'il ne se reconnaît pas dans nos propositions...on prie l'élève de nous en excuser ! On ne peut pas, dans ce cas, profiter de son erreur.

Cette limitation est à l'origine de mon projet FRACT-1 : un logiciel qui sache trouver des cheminements erronés pouvant conduire à la réponse de l'élève. J'y reviens dans le chapitre IV sur les erreurs et l'Intelligence Artificielle.

Pour (1), avec deux méthodes différentes (produit en croix et valeurs décimales approchées), il est montré à l'élève que sa réponse n'est pas égale à celle fournie par la "machine" et donc que ces réponses ne peuvent être correctes toutes les deux. L'élève est alors renvoyé sur une "page-choix" ne comportant plus que les 3 choix (2), (3) et (4).

Cette méthode repose essentiellement sur la capacité de l'élève à repérer une contradiction dans " $F = R$, $F = E$ et $R \neq E$ ".

III.4.3.3 Expérimentations passée et future de la maquette

J'ai pu réaliser une courte expérimentation auprès d'élèves de 4ème qui me permet, en particulier, de repérer un problème lié à la partie "remédiation" : peut-on faire appel avec succès à la propriété de non-contradiction ("il est faux que $[A=B \text{ et } A=C \text{ et } B \neq C]$ ") pour convaincre un élève que son raisonnement est incorrect ? Bien que l'échantillon ait été restreint, j'ai eu néanmoins l'occasion de vérifier que cela n'allait pas de soi et ai trouvé un élève qui, bien que ne remettant pas en doute le calcul donné par la machine, refusait d'admettre l'incorrection du sien ! C'est en particulier ce genre de difficulté qui intéresse l'équipe de Daniel LACOMBE. Celle qui travaille avec Roger CUPPENS, dans notre recherche sur les méthodes de l'Intelligence Artificielle appliquées au raisonnement mathématiques, réutilise actuellement cette maquette auprès d'élèves de collèges pour étudier ce type de comportement et essayer de trouver des moyens appropriés de remédiation en vue de les incorporer dans le futur logiciel FRACT-2 (suite "pédagogique" de FRACT-1).

CHAPITRE IV

Erreurs

et

Intelligence Artificielle

- :: - :: -

**FRACT : un exemple de construction d'un Système
Pédagogique à Base d'Erreurs d'Elèves**

Intelligence Artificielle et éducation

IV.1

FRACT :

un exemple de construction d'un Système Pédagogique à Base d'Erreurs d'Élèves

-:-:-

Ce sous-chapitre retrace l'évolution d'un projet didactique construit autour de l'idée suivante : mettre à la disposition d'un apprenant un logiciel de diagnostic d'erreurs qui soit à la fois auto-évaluatif et auto-correctif. Il me donnera aussi l'occasion d'illustrer quelques aspects d'une "pédagogie de l'erreur" telle que présentée au chapitre I.

Le thème retenu est celui du calcul sur les fractions. Il peut s'inscrire soit dans le cadre du soutien pour un enseignement classique, soit dans celui de la formation à distance. Il s'agit de mettre à la disposition d'un apprenant des exercices et une analyse de réponse susceptibles, d'une part, de diagnostiquer des "raisonnements" erronés et, d'autre part, de lui apporter des aides pour comprendre cette situation et pouvoir y remédier.

Les hypothèses, sous-jacentes à ce travail, sont les suivantes :

hypothèse 1: Il existe des domaines de connaissance, comme le calcul sur les fractions, dans lesquels certains comportements de réponse sont expliquables (et modélisables) soit par l'utilisation de règles fausses de transformation résultant, par exemple, d'analogies avec des règles correctes, soit par des enchaînements de règles correctes et de règles incorrectes. J'appellerai désormais "comportement systématique erroné" un tel cheminement et "règle" toute procédure de transformation ou de réécriture d'une expression mathématique en une autre.

Dans une perspective d'adaptation de mon langage à celui de l'Intelligence Artificielle, je représenterai une telle "règle", portant sur une expression F comportant des nombres entiers positifs a, b, c, d, \dots et faisant intervenir des écritures fractionnaires, sous une forme symbolique du type : "Si F est de la forme $P(a,b,c,d,\dots)$ alors F est transformé en $Q(a,b,c,d,\dots)$ ".

Règle R.1

$$\text{Si } F = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \text{ alors } F = \frac{a+c}{b+d}$$

fig. IV.1 : Règle fausse R.1

Ainsi, par exemple, suivant la règle R.1, si une expression F s'écrit comme somme de deux fractions, alors F peut se réécrire sous la forme d'une fraction ayant pour numérateur, la somme des numérateurs, et pour dénominateur, la somme des dénominateurs.

Une règle peut être vraie, au sens mathématique du terme, ou fausse, comme celle présentée ci-dessus,

hypothèse 2: pour de nombreux individus, de tels comportements ne résultent pas d'une simple inadvertance mais sont révélateurs de l'existence d'une erreur de niveau au moins 1, méritant une correction et une remédiation. Ces comportements sont ainsi révélateurs de l'état des connaissances et des lacunes de leurs auteurs et donc porteurs d'informations pouvant être prises en compte pour une meilleure correction et une remédiation plus personnalisée (cf. paragraphe sur la pédagogie de l'erreur, chapitre I).

Le logiciel projeté devrait donc être capable :

- de produire des exercices permettant d'induire des comportements de réponses révélateurs de raisonnements erronés systématiques,
- de déterminer, en fonction de la (ou des) réponse(s) fournies par l'apprenant, un ou plusieurs cheminements ayant pu conduire à ce résultat,
- de dialoguer avec l'apprenant pour que, après les lui avoir soumis, celui-ci, soit ne reconnaisse aucun de ces cheminements, soit accepte l'un d'entre eux comme étant celui qu'il a suivi et, alors :
 - d'aider l'apprenant à comprendre ce qu'il y a d'erroné dans son cheminement de réponse,
 - d'aider l'apprenant à, d'une part, modifier sa représentation erronée du domaine considéré (des objets qui le composent et des règles qui lient ces objets entre eux) et, d'autre part, à produire un raisonnement correct dans cette situation de problème.

IV.1.1 Aspects méthodologiques.

Répartition de nos objectifs dans le temps.

L'aspect fondamental de ce travail n'est pas le support informatique mais bien la connaissance didactique du domaine au niveau de la production d'erreurs par les élèves. La méthodologie suivie est donc, dans un premier temps, de mettre en place une recherche des erreurs possibles, des paramètres favorisant leur apparition (avec choix des types d'exercices et des variantes) et des fréquences d'apparition de ces erreurs. Cette recherche devrait permettre de construire un logiciel capable de proposer des enchaînements de règles correctes et de règles incorrectes faisant passer de l'expression mathématique donnée dans l'exercice à celle fournie par l'apprenant.

Dans un second temps, il s'agit de comprendre, en termes de connaissances et de lacunes dans le domaine concerné, ce qu'expriment les erreurs repérées puis d'en déduire des modèles de comportements erronés.

Dans un troisième et dernier temps, nous envisageons d'expérimenter différents moyens de remédier aux erreurs en rectifiant les connaissances erronées et en comblant les lacunes, telles que repérées dans le modèle retenu (ainsi qu'il a été présenté au point précédent).

Ce travail est envisagé dans une perspective de travail autonome de l'utilisateur, avec une implantation sur un support informatique permettant un dialogue à caractère pédagogique de type auto-évaluation, auto-formation.

Néanmoins, comme je l'indique au sous-chapitre consacré à FRACT-1, sans attendre l'existence d'une version répondant à toutes les attentes énumérées ci-dessus, une banque de connaissances de type "système pédagogique à base d'erreurs d'élèves" peut rendre des services aussi bien pour la recherche en didactique que pour la formation des enseignants.

IV.1.2 L'historique de la recherche

IV.1.2.1 Première étape

Dans le cadre de ma mise à disposition par la Direction des Lycées (1982-84) à l'U.E.R. de Didactique des Disciplines de l'Université Paris 7, j'ai collaboré, sous la responsabilité scientifique de Daniel LACOMBE et avec son équipe*, à une enquête sur les erreurs dans les calculs sur les fractions, et ai rédigé le rapport auquel je renvoie le lecteur qui souhaiterait connaître le détail des résultats obtenus (<DUM84c>) et dont je ne présenterai ici que les principaux.

* J. CHASTENET de GERY, S. HOCQUENGHEM (C.R.E.E.M. / C.N.A.M.), G. SOL (Université Paris 7)

IV.1.2.2 Deuxième étape

En 1984, j'implantais en Basic une maquette sur MICRAL-G™, FRACT-Ø. J'ai présenté ce travail et ce logiciel au chapitre III sur l'Enseignement (Non Intelligemment) Assisté par Ordinateur.

IV.1.2.3 Troisième étape

Depuis septembre 1987, je dirige une recherche à l'I.N.R.P., en collaboration avec Roger CUPPENS et Martial VIVET*, sur les méthodes de l'Intelligence Artificielle appliquées à l'éducation et le raisonnement en mathématiques.

Le volet dont je m'occupe plus particulièrement porte sur la création d'un logiciel, appelé FRACT-1, sur le diagnostic d'erreurs, issu des étapes précédentes et construit sur Mac-Plus™ avec le générateur de système-expert NEXPERT™. Nous avons aussi mené une enquête papier-crayon complémentaire à celle de la première étape pour élargir notre base de règles fausses (prise en compte de paramètres non étudiés lors de la première enquête) et affiner certaines règles (par exemple, effet de la présence de "1" aux numérateurs).

Dès que FRACT-1 sera opérationnel, il pourra être complété par des modules pédagogiques permettant des actions de correction et de remédiations des erreurs repérées. Ce logiciel sera désigné ci-dessous sous le nom de FRACT-2.

Des expérimentations de type clinique, à partir de la maquette FRACT-Ø existant sur MICRAL-G™, sont menées par l'équipe de Toulouse pour étudier la pertinence de certaines démarches correctives.

Daniel LACOMBE et son équipe continuent le développement d'un produit, METAFRAC, centré sur la remédiation d'erreurs portant plus sur des incompréhensions profondes (égalité, transformation, déduction,...) que sur des erreurs de calcul proprement dites. Après quelques essais (pour d'autres didacticiels) avec le langage auteur ARLEQUIN, il est plutôt envisagé d'utiliser une programmation en Basic.

* l'équipe est actuellement constituée, en plus des trois responsables régionaux, sur Paris de J.F. BOUDINOT, E. BRUILLARD, J-Ph. DROUHARD, B. GRUGEON, Y. PAQUELIER, C. TERLON, sur Le Mans de M. AIGLE, S. DEMARS et sur Toulouse de M.Ch. BERGE, M. CAILLENS, M.Cl. CHEVALIER, J. DUVERNEUIL, J. FAGES, , J.L. SENDRAL.

IV.1.3 La première enquête

IV.1.3.1 Construction des tests et organisation de l'enquête

Nous avons construit une batterie de 40 tests à partir de 57 exercices répartis en 8 types; chaque test comportant un exercice de chaque type.

Les 8 types sont (dans cet ordre sur les feuilles remises aux élèves) :

(1) $\frac{abc + bb'd}{ab'c' + bb'd}$

(2) fractions superposées (quotients de sommes de fractions)

(3) somme ou différence de 2 fractions ou d'une fraction et d'un entier

(4) produit de 2 fractions ou d'une fraction et d'un entier

(5) quotient de 2 fractions

(6) quotient d'une fraction par un entier (ou vice versa)

(7) $\frac{a \times b \pm c \times d}{c \times b \pm a \times d}$

(8) simplifications.

La liste de tous les exercices proposés est fournie à la page suivante (fig.IV.1).

Les tests furent passés par les élèves, en moyenne, en 20 minutes.

La population étudiée provenait de trois groupes : des élèves de 3ème de collège, des élèves de 3ème de L.E.P. (lycée d'enseignement professionnel) et des élèves de 1ère A (section littéraire).

Nous avons obtenu les réponses de :

-> 38 collèges, soit 1107 élèves, d'âge moyen 15 ans,

-> 33 L.E.P., soit 809 élèves, d'âge moyen 16 ans,

-> 42 lycées, soit 1037 élèves, d'âge moyen 17 ans.

J'ai effectué le dépouillement des résultats sur Apple II™ avec le système de gestion de bases de données d-Base II™.

Type (1): $\frac{6900 + 63}{1400 + 63}$ $\frac{1290 + 63}{1400 + 63}$ $\frac{99 + 1515}{55 + 1515}$ $\frac{33 + 6012}{88 + 6012}$

$$\frac{63 + 45}{35 + 45}$$

$$\frac{728 - 63}{618 - 63}$$

Type (2): $\frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{5} + \frac{11}{3}}$ $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}$ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}}$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{8}{15}}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}}$$

Type (3): $\frac{13}{25} + \frac{7}{25}$ $\frac{9}{7} - \frac{6}{21}$ $\frac{5}{3} - \frac{35}{21}$ $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ $\frac{1}{3} + \frac{4}{7}$ $\frac{5}{4} - 1$

$$\frac{1}{3} + 1$$
 $\frac{4}{5} - 1$ $\frac{2}{3} + 5$ $\frac{7}{12} - \frac{6}{12}$ $\frac{5}{7} + \frac{6}{21}$ $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$

Type (4): $4 \times \frac{3}{7}$ $\frac{3}{7} \times 4$ $5 \times \frac{3}{7}$ $\frac{3}{7} \times 3$ $7 \times \frac{3}{7}$ $\frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$ $\frac{2}{3} \times \frac{7}{3}$

$$\frac{6}{7} \times \frac{6}{5}$$
 $\frac{20}{3} \times \frac{21}{5}$ $\frac{3}{20} \times \frac{5}{21}$ $\frac{1}{9} \times \frac{3}{5}$ $\frac{21}{35} \times \frac{20}{12}$ $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3}$

Type (5): $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{7}}$ $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{2}}$ $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}}$ $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{7}}$ $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$ $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{1}{4}}$

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}}$$

Type (6): $\frac{2}{\frac{3}{5}}$ $\frac{9}{\frac{7}{7}}$ $\frac{2}{\frac{7}{10}}$ $\frac{\frac{2}{3}}{5}$ $\frac{\frac{9}{3}}{7}$ $\frac{2}{10}$

Type (7) $\frac{3 \times 11 \pm 5 \times 7}{5 \times 11 \pm 3 \times 7}$ (4 variantes)

Type (8): $\frac{9 \times 7 \times 40}{21 \times 30}$ $\frac{21 \times 30}{9 \times 7 \times 40}$ $\frac{6 \times 14 \times 55}{20 \times 21 \times 11}$

fig.IV.1 : Liste exhaustive des exercices de la 1ère enquête

IV.1.3.2 Remarques générales et résultats principaux

Nous avons beaucoup regretté de ne pas avoir demandé aux élèves d'indiquer le détails de leurs calculs; en effet nous ne disposions donc que des résultats finaux et nous avons été très souvent incapables de reconstituer leurs démarches. Cette douloureuse expérience a certainement été décisive quant à l'évolution de notre recherche (et aussi pour notre seconde enquête).

Chaque élève ne passait qu'un seul exercice de chaque type. Nous n'avions donc pas le moyen de savoir si un comportement erroné d'un élève était accidentel ou reproductible; je reviendrai plus loin sur ce problème.

D'un point de vue général, les trois populations observées présentaient les traits suivants :

- > grande ressemblance entre les élèves de 1ère A et les élèves de collège,
- > résultats plus faibles au L.E.P. avec une très grande diversité des réponses fausses.

Les différents taux de réussite suivant les types d'exercices sont donnés dans le tableau de la figure IV.3 à la page suivante.

On peut remarquer les points suivants :

-> les élèves de 3ème de L.E.P. ne réussissaient qu'à 50% environ les exercices élémentaires (somme et produit de deux fractions) mais, curieusement, c'est aussi dans cette proportion qu'ils réussissaient les exercices sur le quotient de deux fractions;

-> 20% des élèves de collège et de 1ère A ne calculaient pas correctement le produit de deux fractions;

-> les résultats globaux donnés dans le tableau suivant ne distinguent pas les résultats, dans le cas d'une fraction et d'un nombre entier, suivant la position relative des deux éléments (addition, soustraction, multiplication). Ce paramètre n'avait pas vraiment été pris en compte dans cette première enquête et les seuls éléments d'information dont nous disposions portaient sur le produit. Les taux de réussite varient sensiblement d'une position à l'autre prouvant que la commutativité du produit ne faisait certainement pas partie des connaissances de base de ces élèves. Ainsi, par exemple, pour les élèves de L.E.P., si le nombre entier est placé avant la fraction le taux des réussites est de 60%; il est de 47% dans le cas contraire.

TYPE	L.E.P.	Collège	1ère A
SIMPLIF. faux diviseurs (type 1)	43	52	60
Fractions superposées (type 2)	26	54	61
SOMME (type 3) (2 fract.)	50	87	91
(1 nbre x 1 fract.)	55	88	91
	38	85	91
DIFFERENCE (type 3) (2 fract.)	41	81	86
(1 nbre x 1 fract.)	41	81	85
	40	80	86
PRODUIT (type 4) (2 fract.)	54	83	84
(1 nbre x 1 fract.)	54	80	79
	53	86	88
QUOTIENT (2 fract. - type 5)	46	77	83
(1 nbre x 1 fract. - type 6)	52	79	85
	41	75	81
SIMPLIF. divis. visibles (type 7)	32	46	61
SIMPLIF. de produits (type 8)	54	70	80
TOTAL	41	68	70

fig.IV.3 : pourcentage des réussites à la 1ère enquête suivant les types d'exercices donnés précédemment, avec ou sans simplification du résultat.

Les principales erreurs repérées sont les suivantes :

-> pour les additions de deux fractions :

la somme des numérateurs sur la somme des dénominateurs (Règle R.1, fig. IV.1);

Remarques :

1) cette règle est moins souvent appliquée lorsque les dénominateurs sont égaux,

2) si les numérateurs sont égaux à 1, certains élèves trouvent aussi 1 (et non pas 2) pour numérateur du résultat:

Règle R. 1.1

$$\text{Si } F = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ alors } F = \frac{1}{a+b}$$

fig. IV.4 : Règle fausse R.1.1

3) aucun de nos exercices ne comportait de 1 ou de 0 au dénominateur.

-> pour la différence de deux fractions :

la différence des numérateurs sur la différence des dénominateurs (avec éventuellement oubli du signe moins) :

Règle R. 2

$$\text{Si } F = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \text{ alors } F = \frac{a - c}{b - d}$$

fig. IV.5 : Règle fausse R.2

cas particulier : si les numérateurs sont égaux à 1, certains élèves trouvent aussi 1 (et non pas 0) pour numérateur du résultat:

Règle R. 2.1

$$\text{Si } F = \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \text{ alors } F = \frac{1}{b - d}$$

fig. IV.6 : Règle fausse R.2.1

Ceci pourrait résulter de l'application de la règle R.2 suivie du remplacement du zéro par un 1 (croyance en une interdiction du zéro dans une fraction - extrapolation de ce qui existe pour les dénominateurs), ou bien d'une "réduction au même numérateur".

Remarque : nous avons aussi trouvé quelques élèves soustrayant les numérateurs et additionnant les dénominateurs :

Règle R. 2.2

$$\text{Si } F = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \text{ alors } F = \frac{a-c}{b+d}$$

fig. IV.7 : Règle fausse R.2.2

-> pour la somme d'une fraction et d'un nombre entier :
ce nombre additionné seulement au numérateur :

Règle R. 3

$$\text{Si } F = \frac{a}{b} + c \text{ alors } F = \frac{a+c}{b}$$

fig. IV.8 : Règle fausse R.3

ou additionné à la fois au numérateur et au dénominateur :

$$[(a/b) + c = a+c/b+c],$$

ou bien ce nombre additionné au numérateur, et 1 additionné au dénominateur :

$$[(a/b) + c = (a/b) + (c/1) = a+c/b+1];$$

-> pour la différence d'une fraction et d'un nombre :

comme ci-dessus mais avec des soustractions; nous n'avions étudié alors que deux exemples qui étaient d'ailleurs fort particuliers puisque le nombre en question était 1 et qu'il était placé **derrière** la fraction; notre seconde enquête nous a permis d'obtenir d'autres informations sur ce point;

-> pour le produit de deux fractions :

le produit obtenu (correctement) mais avec la seconde fraction inversée (méthode sans doute inspirée du fameux "produit en croix", rebaptisé par Daniel LACOMBE "signe de

croix" en raison des vertus magiques de cette opération !); quelques élèves effectuent correctement une addition de fractions au lieu de la multiplication attendue.

Cas particulier : si les deux fractions ont même dénominateur un grand nombre d'élèves conservent ce dénominateur "commun" (12% au collège, 15% au L.E.P. et 16% en 1ère A !); l'erreur consistant à rechercher et à utiliser un dénominateur commun est moins fréquente (entre 1 et 2% quelle que soit l'origine des élèves); après simplification on peut ainsi obtenir le produit des numérateurs :

$$(a/b) \times (c/d) = (ad/bd) \times (bc/bd) = (adbc/bd) = ac;$$

enfin, et sensiblement dans les mêmes proportions, on trouve les élèves qui font une addition des deux fractions au lieu de faire un produit;

-> produit d'une fraction par un nombre entier : l'erreur la plus répandue consiste à multiplier numérateur et dénominateur par ce nombre.

Il est intéressant de noter que l'on pourrait considérer cette erreur comme se déduisant de la règle R.1, ainsi par exemple :

$$3 \times (a/b) = (a/b) + (a/b) + (a/b) = (a+a)/(b+b) + (a/b) = (a+a+a)/(b+b+b) = 3a/3b.$$

Remarque : nous n'avons pas posé d'exercice du type $(a/b + a/b)$, ni dans la première ni dans la seconde enquête, nous ne savons donc pas s'il existe des comportements particuliers dans ce cas.

Si l'opération indiquée ci dessus n'introduit pas d'erreurs de calcul, et si elle est suivie d'une simplification correcte, le candidat obtient ainsi pour réponse la fraction de départ.

Je considère cet exemple comme parfaitement révélateur de la nature des fractions pour un grand nombre d'élèves (13% en L.E.P., 4% au collège et 2% en 1ère A) : pour eux les fractions ne représentent pas des nombres; en effet ils ne sont pas choqués de voir que, contrairement à ce qu'ils savent parfaitement sur les nombres entiers, 5 fois une fraction peut être égale à cette fraction (alors que "5 fois quelque chose" c'est "5 fois plus grand", "5 fois plus", ...).

On trouve aussi parfois le produit du numérateur par ce nombre (sans dénominateur), ce qui peut se comprendre comme une "réduction au même dénominateur" à partir du nombre entier suivie d'une simplification :

$$(a/b) \times c = (a/b) \times (bc/b) = abc/b = ac.$$

Remarque : cet aspect de la "nature" des fractions pour l'élève est l'un des points centraux du logiciel METAFRAC mentionné au début de ce chapitre.

-> pour les quotients : l'erreur la plus fréquente consiste à prendre pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs (ce qui revient

donc à faire le produit des deux fractions !); dans le cas du quotient d'une fraction par un nombre entier la principale erreur, fort importante statistiquement (L.E.P. 12%, collèges 11% et 1ère A 8%), est de multiplier le numérateur de la fraction donnée par le nombre entier considéré; l'erreur analogue dans le cas du quotient d'un nombre entier par une fraction est moins fréquente (L.E.P. 5%, collèges et 1ère A 2%);

-> pour les exercices de simplification nous avons noté des taux non négligeables de réponse "0" pour une fraction en fait égale à 1 (L.E.P. 8%, collèges 10%, 1ère A 7%);

-> pour les exercices avec "simplifications piégées" ($X+Y/X+Z$) nous avons utilisé des valeurs numériques telles que, autant que faire se peut, deux transformations erronées distinctes ne produisent pas le même résultat (dans la perspective de notre logiciel FRACT-Ø que je présente au chapitre III sur l'E.(N.I.)A.O.).

Les réponses attendues sont répertoriées dans le tableau de la figure IV.9 ci-dessous.

Sur 2684 réponses (en provenance des collèges, L.E.P. et 1ère A) les résultats furent les suivants (donnés par colonne) :

(11) :	2 fois	(10) :	78 (3%)	(21) :	286 (11%)
(12)+(18) :	41 fois	(19) :	7 fois	(20) :	3 fois
(14) :	0 fois	(15) :	0 fois	(16) :	10 fois
(13) :	15 fois	(17) :	8 fois		

Remarques :

- seules les étapes (14) et (15) n'ont pas été fournies,
- de très nombreuses erreurs ne sont pas répertoriées dans ce schéma,
- l'erreur la plus répandue (correspondant aux résultats 10 et 21) n'est pas produite avec la même fréquence suivant l'origine des élèves (collèges : 20%, 1ère A : 10% , L.E.P. : 9%).

Nous avons aussi l'intention d'étudier l'importance du facteur "taille" des 4 nombres considérés avec, par exemple, la possibilité d'une simplification de termes "négligeables" devant d'autres; le fait que X soit beaucoup plus grand que Y et Z n'a augmenté le taux d'erreur que chez les élèves de 1ère A. En revanche nous n'avons noté nulle part de modification importante du taux de réussite liée à la position respective des X, Y et Z dans l'écriture de la question.

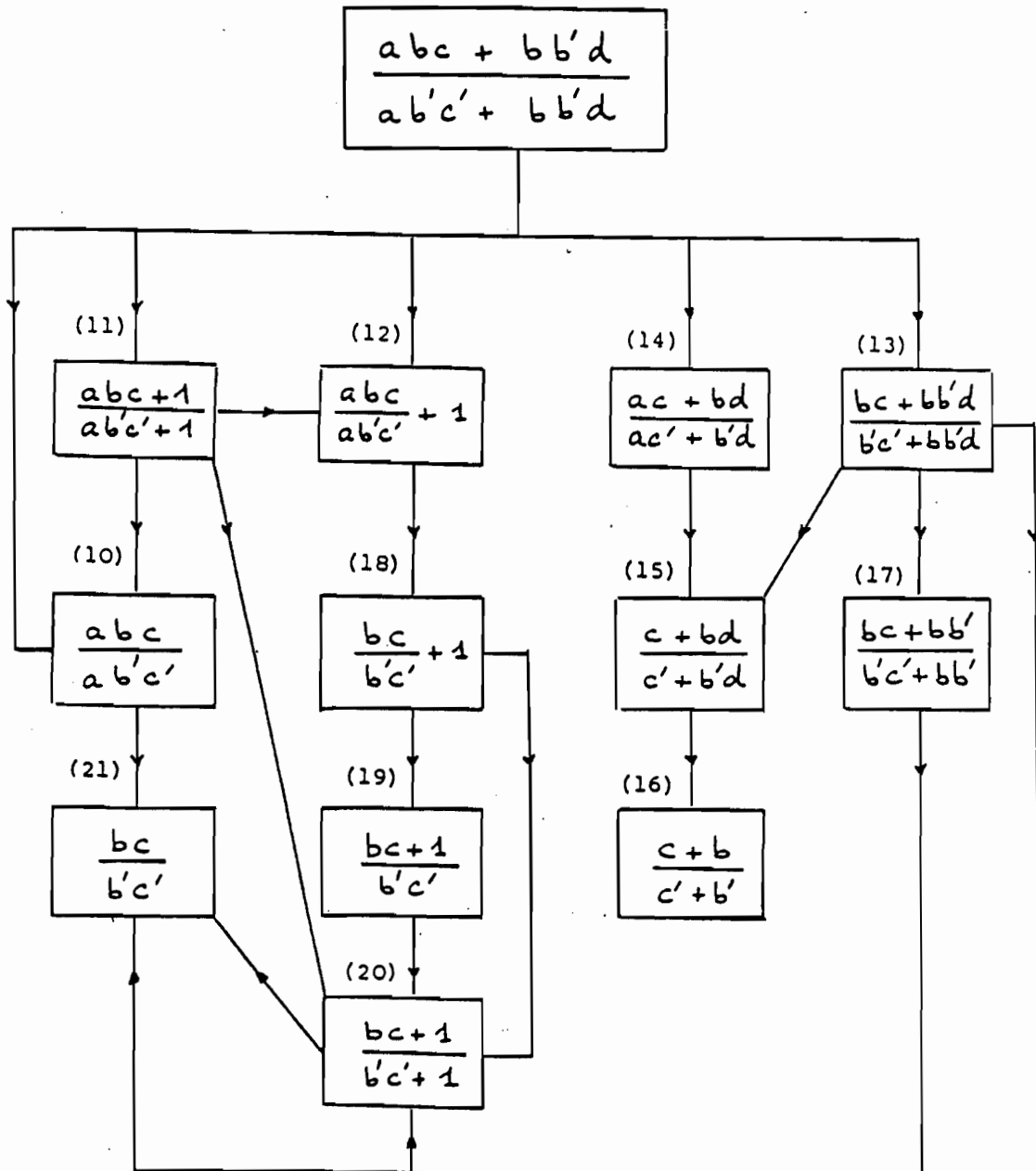


fig.IV.9 : "simplification piégées"
 tableau des résultats erronés a priori possibles

IV.1.4 La seconde enquête

En préparant la base de règles pour FRACT-1, notre équipe a constaté qu'un certain nombre de questions restaient sans réponse après analyse de la première enquête, comme je l'ai signalé précédemment, au fur et à mesure du rappel des résultats. Nous n'avions pas le détail des productions des élèves; certains paramètres n'avaient pas été pris partout en compte (présence du 1, positions relatives du nombre entier et de la fraction dans la somme, la différence,...).

Nous voulions aussi profiter de ce que les astronomes appelleraient une "conjonction planétaire" exceptionnelle. En raison de divers changements de programmes de mathématiques, les élèves des collèges de la fin de l'année scolaire 87-88 avaient en effet la particularité suivante :

- > les élèves de 6ème étaient les seconds à suivre les nouveaux programmes,
- > les élèves de 5ème l'avaient suivi l'an passé et avaient donc 2 ans dans le nouveau programme,
- > les élèves de 4ème étaient les derniers élèves à suivre l'ancien programme; comme leurs camarades de 6ème, c'était la première fois qu'ils recevaient un cours sur les fractions, mais pas au même âge et pas (théoriquement) avec le même cours,
- > les élèves de 3ème suivaient un cours sur les fractions, pour une deuxième année, comme leurs camarades de 5ème, mais, là encore, ni au même âge, ni avec le même programme.

Une situation qui a de quoi ravir tout didacticien épris de comparaison !

Les résultats complets de cette enquête feront l'objet d'une publication de l'équipe en 1989; je me contenterai ici d'en donner un avant-goût, demandant au lecteur de bien vouloir patienter pour en savoir plus.

IV.1.4.1 Organisation de l'enquête

Les questions étaient regroupées en deux catégories suivant, a priori, deux *niveaux de difficulté*, une pour les 4èmes et 3èmes (niveau 2) et une pour tous les élèves (niveau 1). Chaque catégorie comportait 5 questions. Les élèves de 6ème et 5ème avaient à résoudre 5 exercices, tandis que ceux de 4ème et 3ème en avaient 10. Il fut créé 10 séries dans chaque catégorie, notées de A à J pour le niveau 1, et K à T pour le niveau 2.

Après tirage au sort, 25 classes de chacune des 4 années du collège ont reçu des questionnaires.

Nous avons pu récupérer 831 tests de 4ème et 3ème, et 671 tests de 6ème et 5ème.

Un questionnaire remis aux enseignants était destiné en particulier à connaître le vocabulaire utilisé en classe et les méthodes de rédaction des solutions proposées.

Pour le niveau 1, les exercices étaient (dans cet ordre) des types suivants :

- 1) et 2) simplification (nombre à deux chiffres/nombre à deux chiffres)
- 3) $(a+b)/c$ avec a, b, c nombres à deux chiffres
- 4) $[(axb) \pm c] / d$ avec a, b nombres à un chiffre, c et d nombres à deux chiffres
- 5) $(a/b) \pm (c/d)$ avec a, c nombres à un chiffre, b, d nombres à un chiffre (b et d étant multiples l'un de l'autre) ou b et d nombres à deux chiffres multiples de 10 (avec en plus un cas particulier : $b = 1$).

Pour le niveau 2, les exercices étaient (dans cet ordre) des types suivants :

- 1) somme de deux fractions de nombres à un ou deux chiffres
- 2) différence de deux fractions de nombres à un ou deux chiffres
- 3) somme d'un nombre entier et d'une fraction (ou dans l'autre sens)
- 4) différence d'un nombre entier et d'une fraction (ou dans l'autre sens)
- 5) produit d'un nombre entier et d'une fraction ayant 1 pour numérateur (ou dans l'autre sens).

I. Remplacez chacune des fractions ci-dessous par une fraction égale irréductible (c'est-à-dire qu'on ne peut plus simplifier) :

(type 1/2) $42/72$ $18/81$ $66/44$ $81/18$ $72/42$ $30/40$ $77/44$ $72/75$ $24/27$ $10/30$
 $70/105$ $75/72$ $27/24$ $42/48$ $42/63$ $45/75$ $75/45$ $63/42$ $14/84$ $105/70$

II. Après avoir calculé son numérateur, remplacez chacune des fractions ci-dessous par une fraction égale irréductible

(type 3) $(37+26)/42$ $(23+19)/63$ $(33+12)/75$ $(43+32)/45$ $(59+16)/72$ $(51+30)/18$
 $(39+27)/44$ $(51+26)/44$ $(43+29)/75$ $(11+7)/81$

(type 4) $[(8 \times 6) + 22]/105$ $[(9 \times 8) + 33]/70$ $[(4 \times 5) + 4]/27$ $[(3 \times 7) + 9]/40$ $[(9 \times 5) - 31]/84$
 $[(4 \times 6) + 18]/72$ $[(5 \times 9) + 27]/42$ $[(5 \times 5) + 17]/48$ $[(2 \times 7) + 13]/24$ $[(7 \times 7) - 39]/30$

III Calculez l'expression ci-dessous (donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible)

(type 5) $(5/3) + (4/9)$ $(8/10) - (5/10)$ $(2/3) + (5/6)$ $(3/10) - (3/100)$ $3 + (7/10)$
 $3 - (1/10)$ $1 - (3/10)$ $(3/2) - (5/4)$ $(5/3) + (4/6)$ $(5/6) - (2/3)$

fig.IV.10 : Exercices du niveau 1

Calculez les expressions ci-dessous (donnez les résultats sous forme de fractions irréductibles)

(type 1)	$(5/2) + (7/3)$	$(5/3) + (2/8)$	$(5/12) + (4/9)$	$(3/13) + (7/6)$
	$(3/7) + (3/5)$	$(3/4) + (5/3)$	$(2/3) + (4/5)$	$(8/7) + (6/9)$
	$(10/13) + (7/5)$	$(13/6) + (13/15)$		
(type 2)	$(4/9) - (5/12)$	$(3/5) - (3/7)$	$(5/3) - (3/4)$	$(7/9) - (5/12)$
	$(8/7) - (6/9)$	$(7/5) - (10/3)$	$(8/5) - (5/12)$	$(7/2) - (9/7)$
	$(7/9) - (5/12)$	$(14/16) - (15/12)$		
(type 3)	$5 + (3/2)$	$(1/2) + 3$	$(3/7) + 1$	$7 + (4/9)$
	$(1/3) + 5$	$1 + (12/8)$	$3 + (6/8)$	$(12/8) + 1$
	$(3/2) + 5$	$3 + (1/2)$		
(type 4)	$1 - (3/7)$	$5 - (3/2)$	$3 - (1/2)$	$(12/8) - 1$
	$7 - (4/9)$	$5 - (1/3)$	$1 - (3/7)$	$3 - (7/10)$
	$3 - (6/8)$	$5 - (3/2)$		
(type 5)	$(1/6) \times 8$	$6 \times (1/8)$	$5 \times (1/8)$	$8 \times (1/5)$
	$8 \times (1/6)$	$(1/8) \times 6$	$(1/8) \times 5$	$(1/5) \times 8$
	$9 \times (1/6)$	$(1/6) \times 9$		

fig.IV.11 : Exercices du niveau 2

Remarque : Les textes distribués aux élèves comportaient des fractions écrites avec des traits horizontaux (notation "classique" au collège) et non pas obliques comme ici où des problèmes de mise en page nous ont fait choisir cette notation.

IV.1.4.2 Résultats au niveau 1

Etant donnée la très grande différence entre, d'une part 6ème et 5ème et, d'autre part, 4ème et 3ème, je séparerai les résultats en 3 groupes.

IV.1.4.2.1 Simplifications simples (numérateurs et dénominateurs : nombres à deux chiffres)

Les résultats ne sont pas mauvais (cf. fig.IV.12 ci-dessous) et les élèves ne semblent pour pas tentés par des simplifications d'écriture ("barrer" un chiffre apparaissant en haut et en bas de la fraction, comme par exemple: $72/75 = 2/5$), cette erreur n'étant apparue que 10 fois sur 1800.

simplification	6ème	5ème	4ème & 3ème	total
correcte et complète	42%	51%	86%	69%
corr. mais incomplète	10%	9%	7%	8%
Total	52%	60%	93%	77%

fig.IV.12 : Taux de réussite aux exercices sur les simplifications

IV.1.4.2.2 Exercices du type $(A+B)/C$

Les valeurs numériques choisies conduisaient, après avoir effectué la somme au numérateur, à l'une des fractions des exercices précédents.

Nous voulions ainsi voir si les élèves faisaient plus ou moins d'erreurs suivant que la simplification apparaissait comme l'unique tâche à accomplir ou comme finalisation d'une tâche plus complexe. Le tableau (fig.IV.13) ci-dessous ne met pas en évidence d'écart significatif entre ces résultats et ceux vus précédemment. Néanmoins 19% des élèves de 6ème et de 5ème ne vont pas plus loin que la simple addition au numérateur et ne pensent pas à simplifier leur résultat. Quant aux erreurs consistant à "barrer" un chiffre se trouvant au numérateur et au dénominateur d'une fraction, le fait d'avoir eu un calcul à faire avant ne change pas beaucoup la situation puisqu'ici cette erreur fut faite seulement 7 fois sur 892.

$(A+B)/C$	6ème	5ème	4ème & 3ème	total
avec simpl. correcte (complète ou non)	39%	55%	78%	65%
sans simplification	19%	19%	8%	13%
Total	58%	74%	86%	78%

fig.IV.13 : Taux de réussite aux exercices du type $(A+B)/C$

IV.1.4.2.3 Exercices du type : $[(A \times B) \pm C] / D$

Les résultats donnés ci-dessous ne diffèrent pas sensiblement de ceux observés aux exercices du type précédent. Quant aux simplifications par un chiffre commun au numérateur et au dénominateur, elles n'apparaissent que 7 fois sur 855.

$[(A \times B) \pm C] / D$	6ème	5ème	4ème & 3ème	total
avec simpl. correcte (complète ou non)	46%	54%	77%	65%
sans simplification	12%	16%	6%	10%
Total	58%	70%	83%	75%

fig.IV.14 : Taux de réussite aux exercices du type $[(A \times B) \pm C] / D$

IV.1.4.2.4 Somme ou différence de deux fractions

Je rappelle que pour ces exercices les dénominateurs étaient toujours donnés de telle sorte que le dénominateur commun soit égal à l'un des deux. Les pourcentages des réussites sont très différents entre les 6ème/5ème d'une part, et les 4ème/3ème d'autre part. Il en est de

même de l'erreur "somme des numérateurs/somme des dénominateurs" qui représente près de 20% des réponses en 6ème/5ème.

(A/B) ± (C/D)	6ème	5ème	4ème & 3ème	total
exact avec ou sans simplification	31%	40%	81%	61%
erreur du type (A±C) / (B±D)	20%	17%	3%	10%

fig.IV.15 : Taux de réussite aux exercices du type $(A\pm C)/(B\pm D)$

On peut aussi noter la différence d'"imagination" des élèves pour ce type d'exercices; en effet il y eut 252 réponses différentes aux 10 exercices proposés, avec un maximum de 33 pour l'exercice $(5/3 + 4/9)$.

IV.1.4.3 Résultats au niveau 2

En général les résultats sont assez voisins mais toujours plus faibles que ceux obtenus lors de la 1ère enquête pour les types d'exercices déjà étudiés à cette occasion. Il faut néanmoins remarquer que les résultats de 1983, rappelés en référence ci-dessous, provenaient uniquement d'élèves de 3ème tandis que ceux de la 2ème enquête proviennent d'élèves de 4ème et d'élèves de 3ème.

Dans le rapport d'enquête relevant de la recherche I.N.R.P. (à paraître en 1989), ces deux populations seront étudiées séparément et les éventuelles différences de comportement seront répertoriées.

On obtient aussi confirmation de ce que l'on avait imaginé du rôle de certains facteurs (par exemple : présence du 1, répétition de valeurs au numérateur ou au dénominateur).

- somme de deux fractions : réussite : 75% (88% en 83)
erreur $(a+c / b+d)$: 3%
- différence de deux fractions : réussite : 63 % (81% en 83)
erreur $(|a-c / b-d|)$: 2%

Pour être plus précis, on peut noter que, pour les deux exercices où le résultat correct était négatif, seuls 37% des 145 élèves ont correctement répondu et 23% ont "oublié" le signe

moins (résultat correct en valeur absolue). Si l'on excepte ces deux exercices, la moyenne des réussites pour les autres exercices de ce type est de 57%.

- somme d'un entier et d'une fraction : réussite : 80% (85% en 83)
erreur $[(a+b)/c]$: 5%

Cette enquête nous permet de vérifier la grande importance du 1. Ainsi la réponse $13/8$ a été fournie par 9 élèves sur 70 (13%) à l'exercice $(12/8)+1$. La place respective de l'entier et de la fraction ne semble pas jouer un rôle particulier dans le taux de réussite.

L'erreur $(a+c/b+c)$ n'a été produite que 4 fois (sur 831).

- différence d'un entier et d'une fraction : réussite : 78% (80% en 83)
erreur $[|a-b|/c]$: 5%

Les erreurs sont plus variées que dans le cas précédent, le signe moins jouant à l'évidence un rôle perturbateur; ainsi lorsque $a-b < 0$ on peut trouver pour réponse $-(a+b)/c$.

Le "1" a conduit 8 élèves sur 80 à répondre $11/8$ à l'exercice $(12/8)-1$.

L'erreur conduisant à $la-c/b-cl$ n'a été produite que 7 fois (sur 831).

-produit d'un nombre par une fraction ayant 1 pour numérateur:
réussite : 85% (pas testé en 83)
erreur (a/ab) : 3%

De nouvelles erreurs ont pu être repérées, ainsi par exemple (sur 831) :

à partir de $a(1/b)$ -> $1/(ab)$ 8 fois
-> $(ab+1)/b$ 6 fois
-> a ou $a/1$ ou ab/b 56 fois (7%)

Ces deux dernières erreurs pourraient provenir des opérations suivantes:

* "réduction au même dénominateur" : $a(1/b) \rightarrow (ab/b)(1/b)$

ensuite, pour la première réponse :

* confusion produit / somme (et conservation du dénominateur commun) :

$$(ab/b)(1/b) \rightarrow (ab+1)/b$$

et pour la seconde réponse :

* produit correct au numérateur mais conservation du dénominateur commun :

$$(ab/b)(1/b) \rightarrow (ab \times 1)/b = ab/b$$

En reprenant les résultats obtenus en 83 avec des fractions dont le numérateur n'était pas égal à 1, on peut s'apercevoir que les deux règles ci-dessus avaient été utilisées au collège : 10 fois sur 274 pour la première et seulement 1 fois pour la seconde (les deux règles étaient un peu plus utilisées au L.E.P.).

IV.1.5 Complément : résultats d'une enquête anglaise récente

L'article (<NWA88>) de Hyacinth NWANA et Peter COXHEAD présenté à Montréal en juin dernier lors du congrès organisé par l'Université de Montréal sur les "Systèmes d'enseignement assistés par ordinateur" (en anglais : ITS, Intelligent Tutoring Systems), nous apporte, d'une part, des informations complémentaires à nos deux enquêtes et, d'autre part, des éléments de réflexions sur la construction de logiciels "intelligents" pour l'apprentissage du calcul sur les fractions.

Certaines informations mentionnées ci-dessous ne figurent pas dans cet article mais m'ont été directement communiquées par Hyacinth NWANA, et je l'en remercie bien vivement.

L'équipe de l'Aston University (Department of Computer Science and Applied Mathematics, Birmingham, Angleterre) se prépare à implanter un logiciel de type tutoriel "intelligent" et a mené, dans ce but, une étude auprès de 74 élèves de l'enseignement secondaire anglais, entre 11 et 15 ans (âge moyen d'environ 12 ans). Les populations relatives à chaque test sont donc très réduites puisque seulement 4 élèves ont passé les deux tests; il n'y a eu qu'une trentaine de tests passés dans chaque catégorie.

Certaines conclusions de cette étude apportent des informations confirmant nos travaux mais d'autres éclairent des zones restées dans l'ombre jusqu'à présent, en particulier sur les difficultés liées à l'écriture dite "mixte" des fractions :

- lors d'un pré-test portant sur des opérations arithmétiques simples seuls 81% des exercices furent réussis. Cette considération est rarement prise en compte lors de l'analyse des réponses à des questions sur les fractions puisque les enfants observés sont supposés maîtriser convenablement les opérations élémentaires sur les entiers. Ce qui semble donc contraire à la réalité (du moins anglaise). On doit cependant noter que ce que les auteurs appellent des "opérations arithmétiques simples" vont, en fait, de calculer $5-4$ ou $2+3$ jusqu'à trouver le plus petit multiple commun à 4 et 6, l'"écriture mixte" de $5/4$ (i.e. $1 \frac{1}{4}$) en passant par la simplification de $3/3$ et $10/12$. Je ne sais pas, au vu des documents en ma possession, où les principales erreurs se sont situées. Les résultats sont peut-être aussi faussés par le fait que ce pré-test comportait déjà des questions sur les fractions.

- les élèves avaient ensuite à répondre à 27 questions sur des additions de fractions ou à 22 questions sur les soustractions de fractions (4 élèves, rapides, purent passer les trois tests, mais leurs résultats sont, d'après les auteurs des tests, "very poor"). Il y eut respectivement 36% et 35% de réussites, ce qui est nettement inférieur à nos résultats puisque, lors de nos épreuves, les sommes de fractions ont été réussies avec une moyenne de plus de 60% (de 31% en 6ème à 81% en 3ème).

Plusieurs explications peuvent être avancées :

- les auteurs ont compté comme faux tout résultat non complètement simplifié et, le cas échéant, non mis sous la forme "mixte", partie entière et partie fractionnaire,

- le nombre d'exercices faisant intervenir ces notations "mixtes", du type $7\frac{1}{3}$, que nous savons être à l'origine de nombreuses difficultés

Outre-Manche, était très important :

-> pour les additions : sur 27 exercices, 11 comportaient cette notation dans l'énoncé et 2 obligeaient à l'utiliser pour l'expression du résultat;

-> pour les soustractions, la proportion est encore plus forte : sur 22 exercices, treize comportaient la notation "mixte" dans l'énoncé et un pour le résultat.

Il serait donc très intéressant de connaître les réussites exercice par exercice pour pouvoir comparer ces résultats avec ceux de nos enquêtes,

- enfin, le texte était rédigé avec des barres obliques (par exemple : $2\frac{2}{3} - 1\frac{7}{9}$) et non des barres horizontales (avec numérateurs et dénominateurs superposés), ce qui rendait la lecture des fractions "mixtes" encore plus compliquée.

On comprend mieux ainsi pourquoi aucun des élèves n'a réussi entièrement l'un ou l'autre de ces deux tests, que 5 élèves seulement réussirent plus de 20 additions sur 27 et que 2 réussirent plus de 16 soustractions sur 22.

- les erreurs les plus répandues pour l'addition (les exemples et les interprétations ci-dessous m'ont été donnés par H. NWANA)

1) 73% des erreurs d'addition reviennent à la somme des numérateurs sur la somme des dénominateurs. Cette pratique reste valable pour les fractions "mixtes"; dans ce cas le numérateur résultant est égal à la somme des parties entières et des numérateurs, le dénominateur étant encore la somme des deux dénominateurs. Ainsi par exemple :

$$3/4 + 1/5 \rightarrow 4/9 \quad 1\frac{3}{4} + 4/7 \rightarrow 8/11 \quad 1\frac{2}{4} + 1\frac{1}{2} \rightarrow 5/6$$

2) le remplacement d'une addition par une multiplication.

Ainsi par exemple : $1/4 + 1/6 \rightarrow 1/24$

3) l'oubli des parties entières; par exemple :

$$9\frac{1}{3} + 5\frac{5}{9} \rightarrow 3/9 + 5/9 \rightarrow 8/9$$

4) l'exemple suivant : $2/5 + 1/2 \rightarrow 2/7 + 10/7 \rightarrow 12/7$ est interprété par H. NWANA comme étant le résultat de la somme des dénominateurs pour trouver un dénominateur commun, puis d'une multiplication des numérateur et dénominateur de chaque fraction pour

fournir le numérateur de l'autre fraction. Ceci me paraît extrêmement compliqué, d'autant que je suis pas sûr que l'intermédiaire, donné ici à titre d'exemple, soit effectivement produit (cet exemple n'est pas hélas tiré de la liste des exercices de l'enquête anglaise).

Je regrette, d'une part, que l'exemple fasse apparaître deux "2" qui nous rendent difficile l'interprétation (d'où l'intérêt de construire des exercices évitant de telles ambiguïtés) et que, d'autre part, les auteurs n'aient pas choisi leurs exemples parmi la liste réellement proposée, ne nous permettant pas ainsi de savoir si de telles pratiques ont été réellement enregistrées (ni avec quelles fréquences)

5) la réduction au même dénominateur sans changement des numérateurs:

$$3/4 + 1/2 \rightarrow 3/4 + 1/4 \rightarrow 4/4 \rightarrow 1$$

6) la réduction au même dénominateur mais avec doublement du dénominateur commun :

$$1/4 + 3/8 \rightarrow 2/8 + 3/8 \rightarrow 5/16$$

7) pour l'addition d'un entier et d'une fraction, l'addition de cet entier à la fois au numérateur et au dénominateur,

8) le numérateur est égal à la somme des deux termes de la 1ère fraction et le dénominateur est égal à la somme des deux termes de la 2ème fraction; là encore l'exemple donné fait apparaître 2 fois un "3" et laisse un doute sur le procédé : $3/5 + 2/3 \rightarrow (3+5)/(2+3) \rightarrow 8/5$.

On pourrait très bien imaginer une procédure faisant intervenir un "renversement" de fraction, ce qui donnerait : $(a/b)+(c/d) \rightarrow (b+d)/(a+c)$; cette transformation a l'avantage de faire jouer aux deux fractions des rôles symétriques; elle a déjà été rencontrée dans nos enquêtes.

9) en cas de fraction "mixte", l'entier est ajouté à la somme des dénominateurs tandis que le numérateur est obtenu comme somme des numérateurs;

$$\text{ainsi : } 2 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2} \rightarrow (1+1)/(2+1+4+2) \rightarrow 2/9.$$

10) la somme des numérateurs sur le produit des dénominateurs.

On remarque que les erreurs ci-dessus, hormis celles qui sont spécifiques à l'écriture "mixte", ont été repérées dans nos épreuves sauf les n° 4 et 8, du moins avec les procédures proposées. En revanche, les auteurs ne parlent pas d'erreurs dues à des confusions de proximité avec la partie entière, par exemple : $3 \frac{2}{3} + 1 \frac{2}{3} \rightarrow 44/3$. Est-ce une erreur que seuls les français, non habitués à l'écriture "mixte", peuvent inventer ?

Ils ne font pas non plus mention de l'erreur consistant à prendre pour numérateur final le "produit en croix" et pour dénominateur la somme des dénominateurs.

- les erreurs les plus répandues pour la soustraction (les exemples et les interprétations ci-dessous m'ont été donnés par H. Nwana)

- 1) partie entière = différence (au signe près) des parties entières
numérateur = différence (au signe près) des numérateurs
dénominateur = différence (au signe près) des dénominateurs

- 2) réduction au même dénominateur mais sans changement des numérateurs avant de faire la différence des numérateurs,

- 3) en cas de second numérateur plus grand que le premier, emprunt de 10 à la partie entière, comme pour les soustractions d'entiers; ainsi, par exemple :

$$3 \frac{1}{9} - \frac{2}{5} \rightarrow 2 \frac{11}{9} - \frac{2}{5} \rightarrow 2 \frac{9}{4}$$

- 4) dans le cas d'un entier moins une fraction "mixte" : différence des parties entières et conservation de la fraction : $4 - 2 \frac{7}{8} \rightarrow 2 \frac{7}{8}$

- 5) emprunt à la partie entière sans tenir compte de l'ancien numérateur; par exemple :

$$4 \frac{2}{8} - 1 \frac{1}{2} \rightarrow 3 \frac{8}{8} - 1 \frac{4}{8} \rightarrow 2 \frac{4}{8}$$

- 6) en cas de nombres plus grands dans la seconde fraction que dans la première, recours au zéro : $1 \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \rightarrow 1 \frac{0}{0}$ ou au blanc :

$$1 \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \rightarrow 1 \frac{1}{}$$

- 7) oubli de la partie entière : $3 \frac{1}{8} - \frac{3}{8} \rightarrow \frac{6}{8}$

- 8) différentes erreurs liées à l'emprunt sur la partie entière pour pouvoir soustraire,

- 9) remplacement d'une soustraction par une addition,

- 10) soustraction des parties fractionnaires mais ajout des parties entières; par exemple :

$$5 \frac{3}{4} - 1 \frac{5}{7} \rightarrow 6 \frac{2}{3}$$

- 11) remplacement du zéro par un "1" dans le résultat final; exemple:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \rightarrow \frac{0}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$$

12) si le numérateur est nul, le résultat est simplement le dénominateur:

$$1/8 - 1/8 \rightarrow 0/8 \rightarrow 8$$

13) numérateur = produit en croix, dénominateur = dénominateur commun

Toutes ces erreurs, hormis celles relatives à l'écriture "mixte", se retrouvent dans nos épreuves. Ceci met bien en évidence le foisonnement de procédures incorrectes induites par l'écriture mixte même si, ne disposant pas ici des fréquences d'apparitions des différentes erreurs, il n'est pas possible d'estimer leur part de responsabilité dans les très mauvais résultats enregistrés.

La répartition des erreurs est (en %) :

Type d'erreur	Addition	Soustraction
"fact" (calcul?énoncé?)	2	8
"systématique"	89	71
"hasard"	9	20

Les auteurs appellent "systématiques" des erreurs pour lesquelles ils furent capables de proposer un enchaînement d'opérations (licites ou non) permettant d'arriver au résultat de l'élève (ce qui correspond à l'acception retenue dans mon propre texte).

On remarque bien évidemment une différence très nette entre addition et soustraction quant à la richesse d'imagination des élèves; plus précisément les auteurs ont remarqué que 5 erreurs "systématiques" expliquent 90% des résultats erronés pour les additions, et le même nombre explique 85% des erreurs pour les soustractions.

Au niveau de la dispersion des réponses, j'ai déjà fait remarquer plus haut qu'en effet le signe moins jouait un rôle perturbateur non négligeable; les 813 élèves de 4ème et 3ème ont d'ailleurs produit 157 réponses différentes aux dix additions proposées et 207 pour les dix soustractions, ce qui confirme sur ce point les résultats de nos collègues anglais.

- La méthodologie de construction des exercices utilisée dans l'expérience relatée ici a permis d'observer la stabilité des erreurs "systématiques" : les 27 exercices sur l'addition (resp. 22 pour la soustraction) étaient en fait construits à partir de 13 (resp. 11) types

d'exercices; les auteurs ont ainsi pu observer combien d'élèves utilisaient deux fois la même méthode (correcte ou non) pour résoudre chacun des types étudiés.

Les résultats (en %) sont les suivants :

	Addition	Soustraction
Comportement stable	74	64
les 2 corrects	32	24
les 2 avec même erreur	42	40
Comportement non-stable	26	36
un correct	9	27
2 erreurs différentes	17	9

Ces résultats sont très intéressants, même si les auteurs les trouvent trop faibles (bien que concordant avec les 79% trouvés par EVERTZ à l'Open University <EVE82>). Ils nous confortent dans l'idée que la représentation de la démarche erronée de beaucoup d'élèves, sous forme d'un enchaînement de "règles opératoires" mémorisées comme telles, vraies ou fausses, est adéquate à notre problème. Ceci reste cependant indépendant de l'argumentation que je développerai plus loin sur l'intérêt de "soigner" des erreurs même isolées, et sur les suites possibles à de tels repérages. Nous ne savons pas non plus exactement dans quelle mesure les exercices dits de même type ne font pas intervenir des facteurs influant sur la fréquence d'apparition de certaines erreurs et négligés par les auteurs.

Par exemple, il ne semble pas que ceux-ci aient pris en compte l'importance du "1" et s'étonnent du fait que 5 élèves (sur combien?) ont répondu $3/6$ à $[2 + (1/4)]$ tandis qu'aucun n'a répondu $3/4$ à $[(2/3) + 1]$.

Lors de notre dernière enquête, il est apparu que cette règle fausse :

$[(a/b) + c \rightarrow (a+c / b+c)]$ n'a pas été appliquée une seule fois (sur 319 élèves) pour des exercices ne comportant pas de "1" dans l'énoncé alors qu'elle le fut 5 fois (sur 512) en présence du "1".

IV.1.6 Présentation de FRACT-1

L'idée de ce logiciel vient de BUGGY et de l'hypothèse suivant laquelle les comportements erronés dans les calculs élémentaires pouvaient suivre des "règles" proches des règles correctes (sur le développement de cette idée dans BUGGY et DEBUGGY voir la traduction de Roger CUPPENS du chapitre 8 de <WEN87>). Cependant, et comme le font remarquer fort à propos Hyacinth S. NWANA et Peter COXHEAD, le calcul des fractions ouvre un champ beaucoup plus riche et plus complexe que celui de la soustraction (par exemple en introduisant des "sous-activités" comme la recherche du dénominateur commun).

Dans sa version actuelle, FRACT-1 travaille à partir de la donnée d'un septuplet ($\$,A,B,C,D,RN,RD$) où $\$$ est le signe +, -, ou x, où A,C, RN sont des entiers positifs et B, D, RD sont des entiers strictement positifs.

Son rôle consiste à trouver toutes les combinaisons de règles vraies et fausses disponibles dans sa base de connaissances transformant l'expression : $(A/B) \$ (C/D)$ en la fraction (RN/RD) , simulant ainsi la situation dans laquelle la machine proposerait une addition (ou soustraction ou multiplication) de deux fractions (ou d'une fraction et d'un nombre) et récupérerait une réponse (RN/RD) de l'apprenant.

Contrairement à ce que Hyacinth S. NWANA et Peter COXHEAD craignent, de l'inintérêt de recourir à un moteur d'inférence sophistiqué pour gérer une banque de règles vraies ou fausses si 5 règles fausses permettent de comprendre 90% des réponses erronées produites dans les additions, je pense que seules, présentement, les techniques de l'Intelligence Artificielle permettent d'espérer gérer de tels problèmes.

En effet, d'une part, les 5 règles trouvées ne répondent pas à 90% des erreurs d'addition mais à 90% des erreurs commises **seulement sur les 27** exercices d'addition proposés à une trentaine d'élèves. En particulier, certains paramètres n'ont peut-être pas été pris en compte lors de la création de ces exercices, comme j'ai cru le remarquer précédemment en parlant du "1". De toute façon, nos enquêtes ne nous ont pas permis de confirmer cette hypothèse de simplicité. De plus, dans une perspective d'utilisation autonome d'un tel logiciel, nous devrions nous intéresser aussi aux 10% (ou plus) qui ne rentrent pas dans le cadre. D'autre part, même en ne conservant que les règles utilisées par au moins 5% de la population testée dans nos enquêtes, nous arriverions à une complexité telle dans leurs enchaînements possibles, que la fameuse "explosion combinatoire" ne serait pas loin (la patience humaine a tendance à exploser encore plus vite).

FRACT-1 veut être une concrétisation de deux aspects possibles d'utilisation d'outils issus de l'Intelligence Artificielle dans l'enseignement l'un pour les chercheurs en didactique, l'autre pour la formation des maîtres.

IV.1.6.1 Un outil pour la recherche en didactique

Il s'agit de fournir aux didacticiens un logiciel permettant de traiter "intelligemment" un corpus d'erreurs répertoriées, c'est-à-dire capable de proposer divers chemins erronés pouvant rendre compte des productions d'élèves. Une telle aide se justifie dès que le travail "à la main" devient irréaliste, comme c'est le cas avec les fractions, parce que l'arbre des possibles est gigantesque et qu'il faut recourir à des heuristiques de parcours.

Avec FRACT-1, notre banque d'erreurs est structurée en "îlots de connaissances", que les anglophones appellent "chunks", regroupant les règles correctes et incorrectes selon qu'elles appartiennent au domaine de la somme, de la différence, ou du produit de fractions; cette organisation n'est pas une partition puisque certaines règles peuvent appartenir à plusieurs îlots. A l'intérieur de chaque îlot, les règles sont identifiées suivant un niveau de fréquence d'utilisation; présentement seulement deux niveaux sont pris en compte, le niveau 1 correspondant aux règles ayant de fortes chances d'être utilisées dans l'îlot considéré. Martial VIVET estime important, pour la suite du projet, d'envisager des "frontières souples" entre les différents niveaux pour tenir compte, en particulier du profil de l'utilisateur.

La recherche d'un chemin erroné est menée comme suit (cf: fig. IV.16) :

- 1) utilisation des règles du niveau 1 de l'îlot correspondant à l'opérateur donné dans l'exercice,
- 2) modification(s) d'une des fractions en fonction de la "facilité" de la simplification (diviseurs à prendre en compte : 2, 5 et 3, dans cet ordre) mais conservation de l'opérateur, recherche au niveau 1,
- 3) modification(s) des deux fractions et conservation de l'opérateur, recherche au niveau 1,
- 4) reprise des valeurs initiale des fractions mais changement d'îlot, c'est-à-dire changement d'opérateur : (+) -> (x), (+) -> (-), (-) -> (+), (x) -> (-), recherche au niveau 1,
- 5) application de la procédure précédente après simplifications des fractions considérées,
- 6) retour aux valeurs et à l'opérateur initiaux avec recherche au niveau 2.

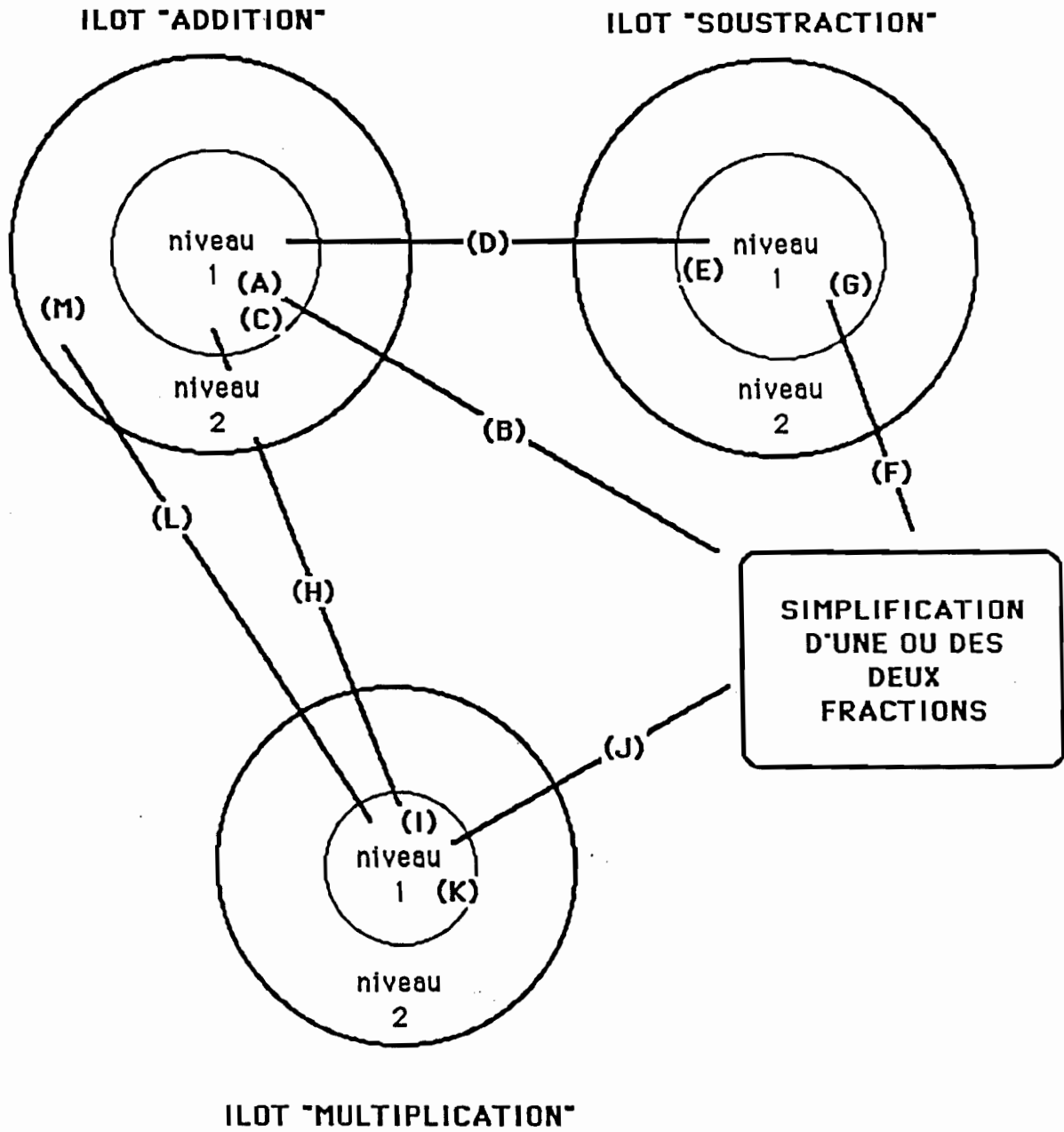


Fig: IV.16: Exemple des premières étapes de la recherche d'un chemin erroné pour une somme de deux fractions

Voici un exercice (non donné dans nos enquêtes) résolu par FRACT-1, celui-ci nous ayant d'ailleurs apporté une solution que nous n'avions pas envisagée (fig. IV.17) :

calculez et simplifiez :

$$\frac{31}{18} - \frac{11}{4} = \frac{7}{9}$$

fig. IV.17 : Problème et réponse erronée proposés à FRACT-1

FRACT-1 a fourni les réponses suivantes :

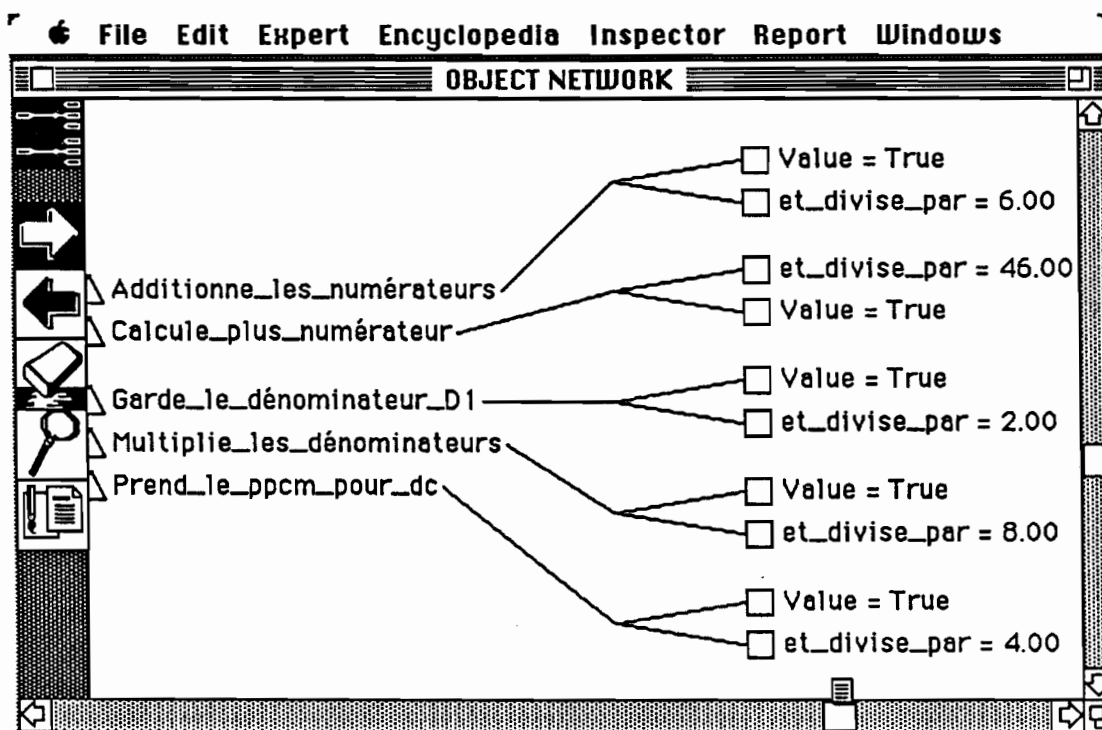


fig. IV.18 : Chemins trouvés par FRACT-1

- > pas de chemin avec éléments donnés dans le problème,
- > pas de simplification possible des fractions données,
- > solution avec passage de la soustraction à l'addition (première règle fausse mais qui n'apparaît pas sur la copie d'écran ci-dessus pour des raisons d'encombrement d'écran) :

->> 2 choix pour trouver le numérateur (deux premières lignes à gauche) :

1) additionne les numérateurs et divise par 6 : $(31 + 11) / 6 = 7$

2) produit en croix de l'addition et divise par 46 :

$(31 \times 4 + 18 \times 11) / 46 = 7$ (nous n'avons pas pensé à cette possibilité !)

->> 3 choix pour trouver le dénominateur (trois dernières lignes à gauche) :

1) garde le premier dénominateur et divise par 2 : $18/2 = 9$

2) multiplie les dénominateurs et divise par 8 : $(18 \times 4) / 8 = 9$

3) prend le p.p.c.m. et divise par 4 : $36/4 = 9$

Ce qui fait donc 6 chemins. De plus, on voit sur cet exemple l'intérêt d'une hiérarchie des solutions pour présenter à l'apprenant ces diverses possibilités dans le "meilleur" ordre possible afin de ne pas perdre trop de temps à essayer de retrouver "sa" solution.

IV.1.6.2 Un outil pour la formation des maîtres

En s'inspirant encore de BUGGY, on peut estimer qu'un tel logiciel serait utilisable avec profit dans le cadre de la formation des maîtres, comme je le disais plus haut, pour les mettre en situation de réfléchir sur des comportements erronés, en particulier sur des enchaînements de règles vraies ou fausses. L'étude même de certaines de ces règles, de la façon dont elles dérivent de règles vraies, est, à l'évidence, formatrice pour des enseignants. Une telle utilisation ne demande pas d'interfaces très sophistiquées et des étudiants ou des enseignants seraient tout à fait en mesure de travailler avec FRACT-1, aussi bien pour "lancer" le système en lui proposant des réponses que pour modifier, ajouter ou supprimer des règles, NEXPERT™ et son environnement MacIntosh™ facilitant ce type d'accès (cf. figIV.19).

IV.1.7 Présentation de FRACT-2

Je ne suis pas en mesure de décrire ici le module "correction/remédiation" puisque, comme indiqué précédemment, notre réflexion se poursuit et notre recherche a besoin de temps pour mener à bien les expérimentations sur le terrain avec les différents protocoles envisagés. En revanche, je puis présenter maintenant divers éléments de réflexion sur les aspects pédagogiques de notre logiciel et sur les bases de sa conception.

L'erreur n'a pas besoin d'être systématique, au sens de répétable indéfiniment, pour mériter une attention particulière de la part du pédagogue et tenter de remédier à cette situation. En effet, si, par exemple, lors d'un exercice portant ostensiblement sur le calcul des fractions (et non pas s'il s'agit d'additionner deux fractions comme quinzième activité d'un problème de chimie), un apprenant additionne les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, c'est qu'il utilise une démarche erronée qu'il faut lui mettre en évidence, sur laquelle il faut l'amener à réfléchir ; car, dans ces conditions "scolaires" de réponse, cette erreur peut être

profonde et mériter remédiation. Il sera alors nécessaire d'essayer, avec un autre problème, de déterminer la profondeur "réelle" de cette erreur pour que la remédiation soit appropriée.

Néanmoins, si l'on admet que chaque élève dispose d'une très grande quantité de règles erronées, on comprend que l'on ait peu de chances de voir apparaître une quelconque stabilité dans ces comportements de réponses, même dans des contextes à première vue semblables. Notre seconde enquête nous a d'ailleurs fourni des exemples de copies où presque toutes les erreurs sont explicables par un modèle unique (cf. fig.IV.20) et d'autres où différents modèles erronés se côtoient (cf. fig.IV.21).

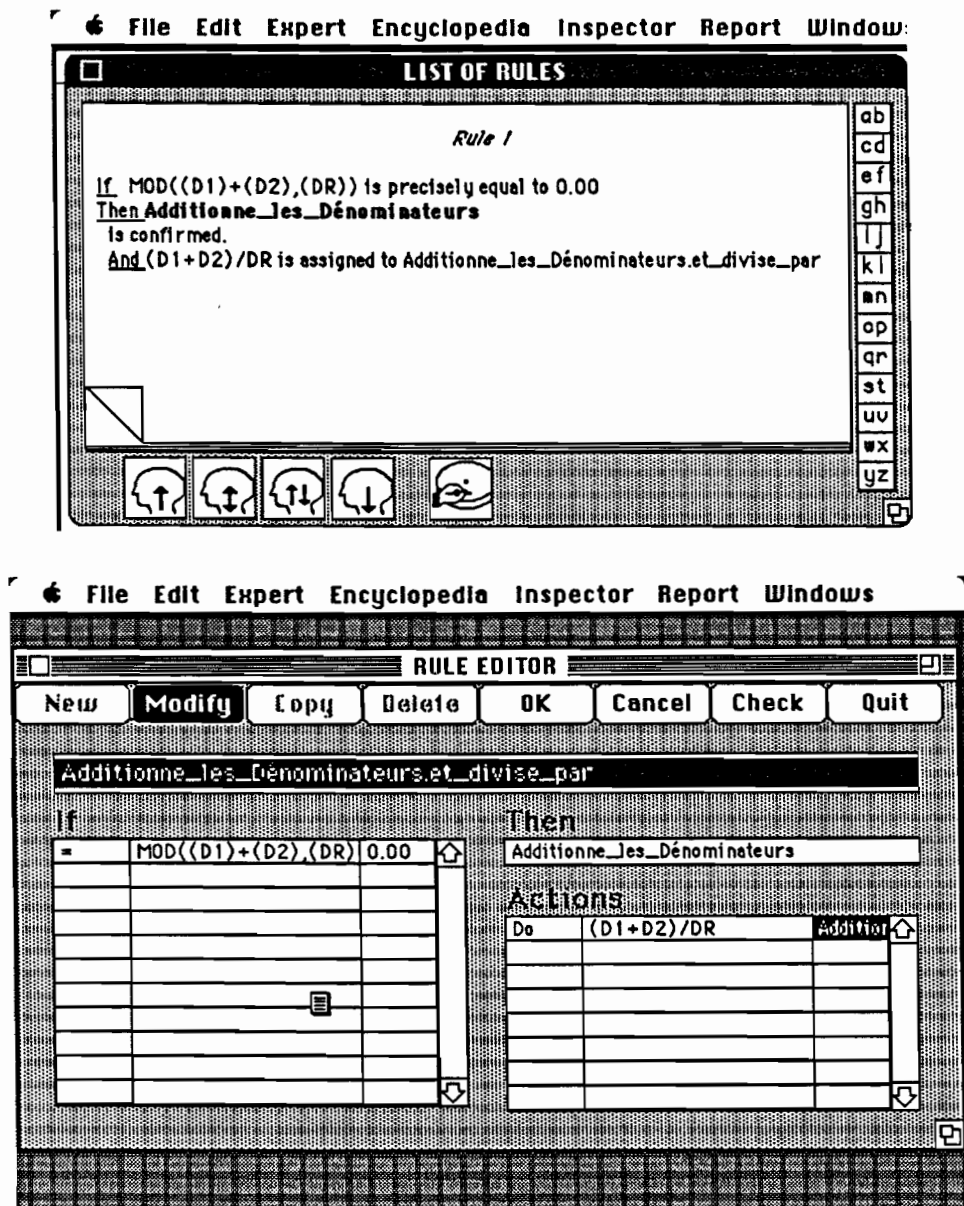


Fig IV.19: Exemples de deux représentations possibles de règles

T 1 ----- T 1

$$\frac{13}{6} + \frac{13}{15} = \frac{13}{2 \times 3} + \frac{13}{3 \times 5} = \frac{13}{2} + \frac{13}{5} = \frac{13}{7} \dots$$

T 2 ----- T 2

$$\frac{14}{16} - \frac{15}{12} = \frac{2 \times 7}{2 \times 8} - \frac{3 \times 5}{3 \times 4} = \frac{7}{8} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots$$

T 3 ----- T 3

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \dots$$

T 4 ----- T 4

$$5 - \frac{3}{2} = \frac{5}{1} - \frac{3}{2} = \frac{2}{-1} \dots$$

T 5 ----- T 5

$$\frac{1}{6} \times 9 = \frac{1}{6} \times \frac{9}{1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \dots$$

fig.IV.20 : Exemple de modèle unique utilisé pour trois des quatre additions (éventuellement après simplifications) à savoir addition des numérateurs et addition des dénominateurs

R 1 ----- R 1

$$\frac{8}{7} + \frac{6}{9} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

R 2 ----- R 2

$$\frac{7}{2} - \frac{9}{7} = \frac{-2}{-5}$$

R 3 ----- R 3

$$\frac{12}{8} + 1 = \frac{12}{8} + \frac{8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

R 4 ----- R 4

$$3 - \frac{7}{10} = \frac{30}{10} - \frac{7}{10} = \frac{23}{10}$$

R 5 ----- R 5

$$\frac{1}{5} \times 8 = \frac{1}{5} \times \frac{8}{1} = \frac{8}{5}$$

fig.IV.21 : Exemple d'utilisation simultanée de deux modèles pour l'addition

- 1) addition (ou soustraction) des numérateurs et des dénominateurs entre eux si au point de départ ce sont deux fractions
- 2) ajout d'un dénominateur sous l'entier sans changement de celui-ci mais ensuite conservation du dénominateur commun (sans doublement)

Je partage donc le point de vue de Hyacinth S. NWANA et Peter COXHEAD lorsqu'ils critiquent l'approche retenue par certains systèmes comme DEBUGGY qui consiste à vouloir s'assurer à tout prix de la stabilité de l'erreur :

"Some systems (...) resort to generating other problems which could distinguish amongst these bugs so that to isolate the error. This would be a very time-consuming process in a complex problem, and a doubtful pedagogical value : human tutors would not normally set 10 extra problems simply to diagnose a single mal-rule; rather, they would work through the child's solution. In addition, there is still a high percentage of unexplained errors."

<NWA88> p.406

Notre communauté de vue s'arrête ici : Hyacinth S. NWANA et Peter COXHEAD ont décidé de développer leur logiciel vers un suivi pas à pas de la démarche de l'apprenant, intervenant au fur et à mesure du calcul pour rectifier éventuellement la démarche. Je pense qu'une telle procédure va se heurter à deux difficultés majeures :

- les élèves ne sont pas toujours capables de détailler toutes les étapes de leur raisonnement au point de pouvoir les transcrire noir sur blanc (ou sur un clavier d'ordinateur); le logiciel sera-t-il capable de compléter les étapes manquantes ? cela risque de ressembler à notre projet,
- la démarche pas à pas est très fatigante, surtout pour celui qui a compris vite, et elle risque, en plus de lasser l'apprenant, de parcelliser son activité au point de ne plus avoir une vue d'ensemble de la situation; cette approche rappelle celle retenue dans les enseignements programmés où tout était découpé en très petites "rondelles plus digestes".

Nous envisageons plutôt une approche globale misant sur le fait que, dans la plupart des cas, l'apprenant reconnaîtra sa démarche parmi les deux ou trois présentées par la machine, celle-ci ayant travaillé uniquement sur le résultat final. Ce sera seulement en cas d'échec de cette méthode que l'apprenant pourra, s'il le souhaite, communiquer à la machine certaines étapes de son raisonnement.

Nous pensons, conformément à ce qui vient d'être dit, qu'il ne faudra déclencher le module de remédiation que lorsqu'une erreur aura été décelée et que son niveau de profondeur aura été suffisamment bien estimé, sans attendre qu'à l'occasion d'un grand nombre d'autres exercices l'apprenant reproduise la même erreur. En diminuant les phénomènes dus au temps (oubli des raisons de l'erreur, du cheminement réellement suivi,...), l'explication devrait être plus efficace. FRACT-2 devra aussi mémoriser les erreurs produites pour s'assurer qu'après l'essai de remédiation les règles fausses ne seront plus utilisées.

Je souhaiterais que FRACT-2 ne se contente pas de "corriger" les erreurs repérées mais, suivant les idées exprimées au premier chapitre sur l'utilisation des erreurs, qu'il permette de construire un "vrai" modèle de l'élève, non pas pour le ramener sur le bon chemin en espérant qu'il sera capable de reproduire la "bonne" réponse attendue, mais un "modèle" pouvant rendre compte de la représentation que se fait l'apprenant du champ de connaissances considéré afin de lui apporter une aide efficace.

L'expertise pédagogique contenue dans FRACT-2 serait alors, d'une part, d'être capable de "profiter" des erreurs commises par l'apprenant pour construire un modèle et, d'autre part, d'être capable d'apporter à l'apprenant les connaissances manquantes et de "rectifier" ses connaissances erronées.

Une expérimentation, menée par Dieudonné LECLERCQ en 1977, vient confirmer l'intérêt d'un diagnostic et d'une remédiation immédiats des erreurs. S'appuyant sur une enquête, menée en 1960 par Anne BONBOIR en Belgique, et qui avait permis de répertorier les erreurs commises à 200 questions de mathématiques par un échantillon de 3000 élèves de 6ème année du primaire, un "Programme AutoCorrectif à Embranchements sous forme de Livre Brouillé à Réponses Ouvertes", en abrégé : PACELBRO, fut construit. Sur les notions de pourcentage et de fraction, l'utilisation de ce programme avec les élèves de 10 classes mit en évidence une très nette diminution du nombre d'erreurs entre le pré et le post-test, avec des variations de cette amélioration suivant les "types" d'erreurs.

IV.2

Intelligence Artificielle

et

éducation

-:-:-

Il ne s'agit pas ici de faire une présentation exhaustive des utilisations passées, présentes ou à venir de l'Intelligence Artificielle en éducation : de nombreuses et récentes publications sont disponibles en anglais (voir par exemple <SEL88> ou <WEN88>) et en français (voir la très bonne synthèse faite par Jean-François NICAUD et Martial VIVET dans le numéro spécial de Technique et Science Informatique <NIC88b>).

Je souhaite mettre en évidence, à partir de quelques exemples, où l'Intelligence Artificielle peut intervenir dans un projet pédagogique et situer ma recherche par rapport aux différentes voies possibles.

IV.2.1 Bref historique et éléments pour un état de l'art

Partons d'un domaine "historique" en IA, le jeu d'échecs; il est clair qu'aucun bon joueur n'arrive à un niveau 7 ou 8 de profondeur de recherche de coups par une étude exhaustive et systématique de toutes les combinaisons possibles de mouvements de ses pions et de ceux de son adversaire. Il est tout aussi clair qu'un ordinateur, même très puissant, ne pourrait se contenter d'une telle "méthode" sans risquer de coûter une fortune en temps de calcul, pour faire face à une telle "explosion combinatoire", et de demander à l'utilisateur une patience...infinie. Pour d'autres problèmes, comme la résolution des équations diophantiennes, il ne peut pas exister d'algorithme conduisant de façon certaine et en un temps fini à une solution.

L'Intelligence Artificielle tente de combiner la capacité de mémoire et la rapidité de calcul de l'ordinateur avec la finesse et la performance de l'esprit humain. Elle essaie donc de comprendre le fonctionnement de ce dernier pour démultiplier les capacités du premier, en ayant recours à des heuristiques et pas seulement à des algorithmes. Voilà pourquoi l'Intelligence Artificielle a fait se rencontrer et se confronter, entre autres, informaticiens, logiciens, cognitivistes, linguistes, experts de toute sorte et, plus récemment, pédagogues.

Co-héritiers de programmes d'E.A.O. (pas très à la mode) et des systèmes-experts ("up to date"), de nouveaux outils pédagogiques ont vu le jour depuis la fin des années 70 qui veulent ainsi profiter du développement considérable de l'Intelligence Artificielle dans le monde de l'industrie (e.g. système de contrôle des centrales nucléaires), de la médecine (e.g. système de diagnostic médical comme MYCIN), ou des services (e.g. gestion de l'annuaire électronique sur Minitel).

En France, après l'E.I.A.O., cette appellation, euphoniement peu aisée, ayant des connotations péjoratives rappelant trop fortement certaines de ses racines, beaucoup de ces produits nouveaux sont appelés I.T.S., pour "Intelligent Tutorial Systems", ce qui est traduit, en France, par T.I., pour "Tutoriels Intelligents", tandis que le Québec semble opter pour des "systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur".

Si l'on acceptait de ne pas particulariser outre mesure l'aspect "tutoriel" de ces objets, ils pourraient facilement être classés parmi les "Systèmes à Base de Connaissances" que les anglophones appellent "Knowledge Based Systems", en abrégé K.B.S.

La plupart de ces produits inspirés des méthodes de l'Intelligence Artificielle sont construits suivant un schéma pouvant être réduit à :

-> une banque de connaissances sur un domaine particulier (appelé le domaine d' "expertise") comportant des faits
(par exemple : "température_eau_radiateur = 67")

et des "règles de production" du type:
"Si A_1 et A_2 et ... A_n alors B_1 et B_2 ...et B_p "
où les A_i sont des faits et les B_j des actions.

(par exemple :

"si température_eau_radiateur > 100 et temps_passé > 5

alors

Stop = V et Ajouter_eau_froide (Lieu = radiateur, Litres = 5)"

-> un "moteur d'inférence" : indépendant du contenu des données il permet de déduire "logiquement" des faits à partir de faits existants et des règles de production ("chaînage avant"), ou bien, un fait inconnu étant proposé (comme un but), il cherche si ce fait est déductible des faits connus ("chaînage arrière");

-> une **interface** avec l'utilisateur : pour que l'expert puisse construire ou modifier les banques de connaissances et pour que le non-expert puisse profiter au maximum de cette expertise.

Dans le cas des produits destinés à l'éducation on trouve quelques éléments supplémentaires :

-> l'expertise sur le domaine disciplinaire ne se limite plus à la seule capacité de résoudre des problèmes dans ce domaine mais contient aussi des connaissances sur les moyens disponibles et mis en jeu pour de telles résolutions; cette "transparence" des raisonnements permet d'envisager des apprentissages pour l'utilisateur à la lumière des démarches mises en œuvre par le système (on parle alors de "boîtes de verre" par opposition aux classiques "boîtes noires");

-> une banque de connaissances pédagogiques; cette expertise peut être séparée en deux (cf. <MAN88>) : d'une part, un "modèle de l'élève" supposé tenir compte (aspects historiques en particulier) de l'interaction entre le système et l'utilisateur pour personnaliser son apprentissage et, d'autre part, un "guide pédagogique" (en anglais : *tutorial planning component*) chargé de gérer le travail de l'utilisateur (cf. les "plans" proposés par Martial VIVET, voir par exemple <NIC88b>) en tenant compte d'une organisation "pédagogique" du contenu disciplinaire considéré et de l'état du "modèle" de cet utilisateur.

A l'heure actuelle, il est possible de développer soi-même un tel ensemble à partir de langages de programmation bien adaptés (LISP ou Prolog pour les plus connus), ou bien d'utiliser un logiciel ouvert permettant la construction des banques et assurant les deux autres fonctions de moteur d'inférence et d'interface; les anglophones ayant baptisé ces outils des "shells" nous en sommes venus à "coquilles (de systèmes-experts)".

C'est avec un tel logiciel, appelé NEXPERT™, que nous travaillons sur FRACT-1. Il possède, en plus, des fonctions liées à la notion de langage orienté-objet. Sans entrer dans des détails fastidieux, disons qu'il permet de structurer les bases de connaissances et de gérer automatiquement cette structure (en faisant, par exemple, hériter à tous les objets d'une même classe une propriété attribuée en cours de traitement à cette classe).

Pour distinguer cette approche, liée à l'Intelligence Artificielle, de celle de l'E.A.O. traditionnel, on peut retenir deux points essentiels :

-> le programme ne contient pas uniquement des problèmes et leurs solutions (cf. FRACT-Ø) mais est capable de résoudre lui-même les problèmes qu'il pose, et donc, possiblement, de comparer sa démarche à celle de l'apprenant,

-> le programme se construit une "image" de l'utilisateur au fur et à mesure que celui-ci interagit avec elle, permettant ainsi une personnalisation voire une individualisation des apprentissages; les connaissances pédagogiques sont traitées comme les connaissances disciplinaires, c'est-à-dire que les "solutions pédagogiques" n'ont pas à être enregistrées à l'avance dans le programme mais elles seront déduites de l'état de la base de faits au moment voulu.

Le premier aspect a été très bien développé dans le projet CAMELIA de Martial Vivet (cf. sa thèse d'Etat <VIV84>), le second dans le logiciel WEST (cf. article de BURTON et BROWN "An investigation of computer coaching for informal learning activities" in <SLE82> pp.79.98).

IV.2.2 Quelques exemples de réalisations, utilisant des méthodes d'Intelligence Artificielle, pour l'enseignement des mathématiques

IV.2.2.1 WEST (R.R. BURTON & J.S. BROWN)

Comme je l'ai mentionné dans le chapitre sur l'Enseignement (Non Intelligemment) Assisté par Ordinateur, ma première rencontre avec WEST se fit devant un terminal PLATO™ à l'Université d'URBANA (Illinois).

Qu'il ait été construit il y a près de 20 ans ne fait que mettre en valeur l'immense originalité et le talent de ceux qui imaginèrent un produit que tous les sérieux ouvrages présentant des "Tutoriels Intelligents" placent parmi les plus intéressantes réalisations dans le domaine de l'Intelligence Artificielle.

C'est aussi un bel hommage (involontaire) aux chercheurs de l'Université d'Urbana qui créèrent le langage-auteur TUTOR™ (ne pouvait-on imaginer meilleur appellation pour un langage-auteur allant donner le jour au premier "Tuteur Intelligent"?) et permirent la réalisation du Système PLATO™ (cf. chapitre sur l'E.(N.I.).A.O.). Je regrette d'ailleurs que dans leur tableau récapitulatif (<NIC88b> p. 42), M. VIVET et J.-F. NICAUD indiquent "système PLATO", au lieu de TUTOR™, dans la colonne "Langage", pour WEST.

Pour être tout à fait honnête je crois que l'on doit préciser qu'au moment de la création de WEST, il n'était pas encore question d'Intelligence Artificielle dans l'éducation. Néanmoins il est vrai que sa conception le rend très proche des préoccupations actuelles dans ce domaine.

WEST est conçu comme un jeu éducatif portant sur les opérations arithmétiques simples. Il s'agit de se déplacer dans un parcours à obstacles et raccourcis; le nombre de cases dont on peut avancer est déterminé par le résultat obtenu par le joueur en effectuant des opérations arithmétiques sur 3 nombres lui ayant été fournis de manière aléatoire. C'est donc lui qui détermine les opérations qu'il veut effectuer et dans quel ordre il veut prendre ces nombres.

La démarche de type Intelligence Artificielle repose sur, d'une part, la capacité du programme à optimiser sa réponse et à comparer son choix à celui du joueur et, d'autre part, le guidage ("coaching") de l'utilisateur vers une bonne stratégie.

WEST, bénéficiant des excellentes qualités du graphisme sur PLATO™ et des performances de TUTOR™, peut vraiment être considéré comme un produit directement utilisable par un enfant, apparaissant aux yeux de celui-ci comme un jeu (type "jeu d'arcade") et non pas comme un pensum scolaire.

IV.2.2.2 BUGGY, DEBUGGY, IDEBUGGY BURTON & J.S. BROWN)

Ces logiciels sont à la source de mon projet FRACT, je pense donc intéressant pour le lecteur d'en présenter ici les traits principaux, ne serait-ce que pour, ensuite, montrer en quoi il y a divergence entre les deux.

Dans WEST l'intérêt résidait principalement dans des préoccupations d'heuristiques et d'optimisation, dans BUGGY l'intérêt est focalisé sur la notion d'"erreur" dans une procédure, en l'occurrence la soustraction.

BUGGY est un jeu conçu pour la formation des enseignants. Il s'agit de leur apprendre, d'une part, que les erreurs des élèves peuvent correspondre à des procédures erronées (ayant donc une certaine "logique") et, d'autre part, à repérer ces procédures erronées, appelées "bugs" pour rappeler le jargon informatique (on devrait donc écrire, en français, BOGUE suivant un récent texte réglementaire portant sur le vocabulaire de l'informatique).

BUGGY repose sur une banque de connaissances sur les erreurs produites par des élèves réels lors de soustractions; le programme simule un élève produisant systématiquement le même *bug* et demande à l'élève-maître de "deviner" ce *bug* en regardant cinq soustractions effectuées par cet élève fictif; pour vérifier la validité de sa solution, l'élève-maître fournit une réponse suivant le *bug* deviné et le programme rend son verdict.

DEBUGGY et IDEBUGGY reposent sur la même banque de connaissances d'erreurs; le premier est une aide au diagnostic d'erreurs destiné à l'enseignant souhaitant comprendre, en

temps différé, des comportements d'élèves. Le second se voulait un programme interactif utilisable par un élève. Cette version n'a pas rendu les services attendus, trop d'erreurs restant incomprises du système.

Les idées importantes qui peuvent être retenues de cette entreprise, même si les résultats sont décevants par rapport aux attentes, sont, à mon avis, les suivantes :

- > il existe, dans certains domaines des mathématiques, des comportements erronés systématiques (et donc "représentables", au sens de règles de production),
- > il est nécessaire de mener des recherches "sur le terrain" pour connaître ces comportements erronés,
- > il est intéressant, dans le cadre de la formation d'enseignants, de les faire réfléchir sur de tels comportements, de leur montrer que comprendre "comment" une erreur s'est produite peut apporter des connaissances sur l'auteur du *bug* (voir sur ce point le paragraphe sur la pédagogie de l'erreur), et, enfin, d'entraîner ces enseignants à repérer de tels *bugs* ,
- > il peut être utile de mettre à la disposition des enseignants un outil de diagnostic d'erreurs en différé pour leur faciliter leur travail de remédiation auprès des élèves concernés,
- > il est difficile de gérer une banque de connaissances d'erreurs et encore plus de l'utiliser pour effectuer des diagnostics en direct avec un apprenant.

IV.2.2.3 SEDAF (L. AIELLO, M. CAROSIO, A. MICARELLI)

(cf. <AIE88>)

Je tenais à parler ici de ce projet pour plusieurs raisons :

- il est récent et peut donc donner une bonne idée des développements et des préoccupations actuels,
- il n'est pas anglo-saxon et est donc susceptible de présenter une "philosophie", ou au moins une approche pédagogique, différente(s) et latine(s),
- il porte sur l'enseignement des fonctions et rentre dans le cadre des outils qui pourraient éventuellement être utilisés dans notre recherche I.N.R.P. "limites et infini",
- il comporte une banque de connaissances d'incompréhensions et d'erreurs sur le domaine des représentations graphiques des fonctions; ce point sera repris au paragraphe suivant.

SEDAF se veut une aide personnalisée pour l'apprentissage de l'étude des représentations graphiques des fonctions.

Les points forts et l'originalité de SEDAF, à mon avis, sont les suivants :

-> il utilise au maximum les capacités de calcul et les facilités graphiques de l'ordinateur (en l'occurrence, la station de travail EXPLORER),

-> il décharge l'apprenant des calculs fastidieux et des difficultés de représentation (propre) des graphes des fonctions pour qu'il se concentre sur les propriétés à mettre en évidence et à prouver,

-> il propose un "modèle de l'élève" dynamique qu'il construit au fur et à mesure du "dialogue", à partir d'une base de connaissances d'erreurs,

-> il comprendra un "module thérapeutique" qui déterminera la stratégie d'apprentissage à suivre en fonction des erreurs et des incompréhensions repérées au préalable.

IV.2.2.4 AMALIA (M. VIVET) et APLUSIX (J.-F. NICAUD)

Je ne décrirais pas ici ces deux produits français parce que, d'une part, ils sont assez éloignés de ma direction de recherche et que, d'autre part, leurs auteurs les ont fort bien présentés dans leur article <NIC88b> (ce sont d'ailleurs les seuls logiciels français décrits en détails).

Enfin, je signale au lecteur intéressé que, dans cet article, les auteurs décrivent un autre logiciel destiné à l'enseignement des mathématiques (géométrie élémentaire), **GEOMETRY TUTOR** (ANDERSON), qui utilise aussi une banque de *bugs* .

IV.2.3 Tutoriels Intelligents vs Systèmes à Base de Connaissances

L'article de Mark R. LEPPER et de Ruth W. CHABAY : "Socializing the Intelligent Tutor : Bringing Empathy to Computer" (in <MAN88> pp.242-257) me semble situer la problématique de ce paragraphe à un niveau de non-technicité qui me convient tout à fait.

Après avoir cité GOETHE ("En toute chose, nous n'apprenons que de ceux que nous aimons"), les auteurs se posent des questions sur les ordinateurs promus -Intelligence Artificielle oblige- au rang de tuteurs.

Leur première constatation est qu'il existe peu de recherches sur le tutorat "réel" (humain) et, dans le peu qui existe, les objets principaux d'étude sont reliés à des préoccupations d'ordre cognitif et non pas affectif.

La seconde est que, en dépit de cette quasi vacuité, les logiciels éducatifs "en pointe" comportent tous un module tutoriel même si, vus de près, il est difficile de savoir à partir de quelle information des décisions pédagogiques sont prises. Dans le meilleur des cas il semblerait que, comme dans le cas humain, ce soient des comportements de type cognitifs qui entrent en jeu.

Les auteurs émettent alors l'hypothèse que, dans la formation de type face-à-face / enseigné-enseignant, et plus encore dans le cas d'un tutorat où l'enseignant est avec un seul apprenant, les facteurs affectifs sont primordiaux et que les motivations de cet apprenant sont réellement prises en compte par l'enseignant.

Les auteurs citent, à l'appui de leur dires sur la pauvreté de ce que les concepteurs de logiciels appellent néanmoins des "tutoriels", un exemple de commentaire à partir d'une erreur dans une multiplication (<ATT84>) : à la réponse 32 pour l'opération demandée : 87×43 , le programme répondit :

"Your answer is wrong.

Possible causes of error :

1. You multiplied the number in the multiplicand by the number directly beneath it in the multiplier, and you wrote down the carried number, ignoring the units number".

Je partage l'inquiétude des auteurs de l'article qui se demandent sur quelles bases ce "tuteur" a décidé d'envoyer un tel commentaire, comment un élève de 4ème année du primaire peut réagir à cette information et, en particulier, si il aura envie de recommencer...?

Ils se posent aussi d'intéressantes questions que je reprends volontiers à mon compte :

- quels principes et quelles stratégies de motivation peut-on ou doit-on introduire dans un ordinateur ?
- comment la "personnalité" d'un ordinateur peut influencer les performances et les apprentissages d'un utilisateur ?
- comment un enseignant choisit de réagir à la production d'une erreur par l'apprenant (attendre d'autres erreurs, réagir immédiatement, corriger, expliquer,...) ? comment adapter ce type de choix en fonction de la personnalité de l'apprenant ? comment faire jouer un tel rôle à un ordinateur ?
- l'ordinateur pourra-t-il se mettre un jour "à la place" de l'apprenant ? ("empathetic computer")

Je garde une de leurs dernières remarques pour élargir le problème :

"A sophisticated computer tutor should also know to phrase comments and provide feedback so as to create and sustain student motivation.(...) It should provide 'informational' specific feedback on performance rather than 'controlling' feedback,(...) for instance, and it should know how to present feedback in a fashion that maintains the learner's sense of competence and control".

<MAN88> p. 251

Je n'ai pas repris toutes ces interrogations pour y apporter des réponses mais pour faire comprendre au lecteur en quoi ma démarche s'éloigne de celle des Tuteurs Intelligents.

J'ai rappelé dans un chapitre précédent quelques uns de mes travaux en E.A.O. et quelques caractéristiques de cette approche. Je retrouve dans beaucoup de projets sur les Tuteurs Intelligents des rêves de cette période qu'on aurait pu croire révolue et, mais l'un explique peut-être l'autre, des pionniers de l'E.A.O. reconvertis aux T.I.. Et puisque l'on cite en premier WEST comme un T.I. provenant d'une époque où n'existait que l'E.A.O., est-ce la preuve que la boucle est bouclée et que l'on a peu changé notre conception de l'utilisation de l'ordinateur dans la formation ?

Il faudrait, je crois, commencer par préciser quel public est visé par les T.I. et quels sont les objectifs de formation visés .

Sont-ils destinés à une formation à distance ou à un complément de formation en face à face ? L'utilisateur a-t-il d'autres moyens d'apprendre ? A-t-il reçu une formation préalable à leur utilisation ? Est-il apprenant en formation initiale ou adulte en formation continue? Est-ce un cours ou une banque d'exercices?...

Autant de questions que je me pose et qui me conduise à m'inquiéter de ce nouveau du mythe de l'ordinateur-maître. Lors d'une entrevue que je réalisai avec Jacques HEBENSTREIT pour un cours de la Télé-université, celui-ci déclara :

"C'est toujours cette même vision de l'ordinateur-objet, de l'ordinateur service, de l'ordinateur qui est à la disposition de l'enfant, et pas l'inverse: l'ordinateur doit permettre de faire des choses, mais c'est à l'utilisateur de réfléchir. L'ordinateur doit lui permettre de faire des choses qu'il ne pourrait pas faire sans lui. Je pense que c'est cette voie qu'il faut prendre. Les jeux qui se passent entre l'enfant et l'ordinateur et où l'ordinateur dit 'fait ci', 'fait ça', 'trouve autre chose', 'bravo t'as gagné', c'est très mauvais', 'encore une fois', reconstruisent, implicitement, le mythe de Big Brother. L'enfant doit, systématiquement, considérer l'ordinateur comme un esclave, comme un robot, comme quelque chose qui travaille pour lui, pas comme une machine qui lui donne des ordres ou qui juge ce qu'il fait. Ce n'est pas à la machine de dire 'tu t'es trompé', c'est à l'enfant de se rendre compte qu'il s'est trompé.(...) Jamais l'ordinateur ne doit donner d'ordres à qui que ce soit, parce que c'est une machine, et qu'une machine ne doit pas donner d'ordres à des hommes, c'est intolérable." < HEB87> p.45

Pas plus que l'E.A.O., je ne crois les T.I. capables d'assurer la formation initiale et de "faire cours". Eventuellement, dans des cas très particuliers et pour des publics adultes déjà formés, on peut imaginer que des T.I. pourront rendre service.

Ceci n'est pas en contradiction avec ma profonde conviction (fondée sur mon expérience d'enseignement à distance) qu'il est possible de créer des cours multimédias dans lesquels l'ordinateur peut jouer un rôle important et qui peuvent permettre, en dehors d'une formation de type face à face, à des adolescents ou à des adultes de se former.

Même très intelligents, ces tutoriels sont, de par leur conception, contraires à mes choix pédagogiques : ils recréent la situation maître-élève / détenteur de savoirs-récepteur de savoirs / celui-qui-sait-celui-qui-apprend, avec, en moins (cf. LEPPER & CHABAY), les avantages des relations humaines mais avec, en plus, l'intolérable Big Brother rappelé par HEBENSTREIT.

Pour moi l'ordinateur possède suffisamment de potentialités, encore peu utilisées dans la formation, pour que je n'investisse pas dans un "tutorat" fût-il intelligent.

Ma recherche va donc plus vers l'utilisation pédagogique de systèmes à bases de connaissances.

J'en vois de deux types non nécessairement disjoints : les bases de connaissances exactes et les bases de connaissances d'erreurs.

Du premier type je citerai CAMELIA, créé par Martial VIVET (<VIV84>) et permettant de résoudre des problèmes d'intégration en particulier tout en étant capable de fournir des explications sur le choix des méthodes. Je pense qu'avec une interface permettant un dialogue entre le programme et un utilisateur de type "élève moyen de terminale", il serait possible de rendre de grands services aux enseignants et aux élèves de lycées, voire même de modifier l'enseignement du calcul intégral en terminale.

Ceci pourrait d'ailleurs être réalisé rapidement, tandis que vouloir faire à partir de CAMELIA un "tuteur", même limité à ce domaine, demandera encore un temps de réflexion et de réalisation considérable avant d'être utilisable avec de vrais apprenants.

Le second type regroupe les bases de connaissances d'erreurs. J'y place BUGGY et, bien entendu, FRACT. Elles peuvent être utilisables, comme je l'ai déjà dit, pour la formation des maîtres même sans interfaces très sophistiquées, à condition qu'elles aient été construites sur des informations réelles et qu'elles ne fassent pas intervenir des *bugs* irréalistes. Pour ce qui est de leur utilisation par des élèves, en formation initiale, je pense que la réflexion doit être poursuivie; la voie ouverte par LEPPER & CHABAY mérite attention en particulier pour ce qui est des moyens de convaincre et de motiver.

Mon collègue Jacques BORDIER, de la Télé-université, après m'avoir complimenté sur les capacités réelles et prévues de FRACT, ajoutait dans sa lettre:

"Toutefois la vraie question devrait être : pourquoi les élèves font-ils autant d'erreurs dans l'application des algorithmes de calcul ? Si tu ne réponds pas à cette question qu'est-ce que cela te donnera de faire répéter par l'ordinateur ce que le maître leur a déjà appris et qu'ils n'ont pas retenu ?(...)

Pour mieux m'expliquer sur ces différents points j'ai construit un petit système que je nomme: les tritons.

Un triton est un objet que je note $(a/b/c)$ où a, b, c sont des entiers.

Sur ces objets je définis l'addition :

$$(a/b/c) + (a'/b'/c') = (a*a'/b+b'/c-c')$$

Tu pourrais évidemment calculer maintenant la somme de 2 tritons mais qu'en sera-t-il dans deux jours ?

Tu vois l'idée : tu trouverais absurde que je conçoive un système-expert pour t'aider à ne plus faire d'erreurs sur des calculs de tritons. Tu me dirais : explique-moi donc vraiment ce que c'est des tritons et ce que représentent les opérations sur ces objets.

Vois-tu, les fractions c'est un peu, pour beaucoup d'élèves, comme les tritons pour toi. Non seulement tu ne retiendras pas les définitions mais tu t'en f... complètement de ces objets car tu ne sauras pas quoi faire avec eux."

Je suis persuadé que LEPPER, CHABAY et BORDIER ramènent nos concepteurs de "logiciels intelligents" sur terre, là où il y a, hélas, encore beaucoup d'élèves qui ne comprennent même pas où est le problème...

CHAPITRE V

EXEMPLES DE Q.C.M.

e n

MATHEMATIQUES

- : - : -

Des Q.C.M. pour une sélection:

les concours de l'E.S.I.E.E.

Des Q.C.M. pour une recherche en didactique:

"limites et infini"

Des Q.C.M. pour l'enseignement à distance:

Q.C.M. télématiques, l'existant et le futur

V.1

Des Q.C.M. pour une sélection: les concours de l'E.S.I.E.E.*

V.1.1 ORGANISATION DES CONCOURS DE L'E.S.I.E.E.

V.1.1.1 Présentation de l'E.S.I.E.E.

L'Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique est une école d'ingénieurs, dépendant de la Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris, récemment installée à Marne-la-Vallée, près de Paris. Les effectifs qui furent jusque là d'environ 120 en première année devront bientôt atteindre les 200.

Quelques points caractéristiques peuvent être mentionnés immédiatement:

- l'E.S.I.E.E. recrute au niveau des baccalauréats C et E (exceptionnellement D) et offre une formation d'ingénieur en 5 ans,
- le recrutement se fait par concours avec des épreuves de type Q.C.M. (en mathématiques, sciences physiques et culture générale),
- la formation dans les matières techniques commence dès la première année.

V.1.1.2 Origine, évolution et organisation du concours.

Avant 1982 les candidats, en provenance principalement des classes terminales C, D et E, et, pour une moindre mesure, de Math. Sup. ou de 1ère année de D.E.U.G., étaient choisis sur dossier et sur épreuves de type "test psychotechnique". Devant les problèmes posés, en particulier chez les élèves de terminale D, en mathématiques et en physique durant la première année, il fut décidé de recourir à un concours. En raison du très grand nombre de copies à corriger en un temps très court, l'idée d'utiliser des Q.C.M. (prenant modèle sur ce qui existait aux Etats-Unis) fut retenue et donna lieu, en mai 1983, à une première passation.

* Je remercie vivement Leila REILLE, professeur de mathématiques au groupe E.S.I.E.E., et Jacques WEBER, professeur de mathématiques, Responsable du Concours E.S.I.E.E. pour l'aide et les informations qu'ils m'ont apportées pour l'écriture de ce sous-chapitre.

Pour plus de détails sur ce concours, voir les Actes du Colloque "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés" de l'E.S.I.E.E. (mars 1988)

V.1.1.2.1 Organisation du concours 1983

Il était ouvert aux élèves de terminale C, D et E, et en outre aux élèves de Mathématiques Supérieures et de première année des D.E.U.G. scientifiques.

Une première phase de sélection eut lieu sur dossier:

- moyenne en mathématiques,
- moyenne en physique,
- appréciations confidentielles des professeurs de mathématiques et de physique.

La seconde phase prit la forme de deux épreuves écrites de deux heures, l'une en mathématiques, l'autre en physique. Chaque épreuve comprenait 40 questions de type Q.C.M. simple : cinq réponses (ou cinq propositions) étaient présentées pour chaque exercice; le candidat devait mettre une croix dans la ou les cases correspondant à son choix des réponses vraies. Pour éviter l'ambiguïté de la non réponse, telle que mentionnée au chapitre précédent, entre le rejet de toutes les cases pour une sixième case, notée (F), devait être cochée si le candidat estimait qu'aucune réponse proposée n'était exacte; ceci correspond à l'une des possibilités de "Q.C.M. à solution générale" proposées par Dieudonné LECLERCQ. Les candidats étaient aussi avisés que:

- "chaque réponse fausse entraîne une pénalité (une absence de réponses est donc préférée à une réponse fausse)",
- il y avait au plus deux réponses vraies dans chaque exercice,
- l'usage des calculettes ou des règles à calcul était interdit.

Les textes des exercices et le barème furent choisis par un ensemble de professeurs de l'E.S.I.E.E. et de professeurs de classes terminales.

A partir des résultats obtenus par les candidats au concours et au baccalauréat, deux listes sont établies : une liste dite "principale" comprenant les candidats admis à l'Ecole et une liste dite "complémentaire" dans laquelle d'autres candidats pourront être recrutés en fonction des désistements dans la première liste.

V.1.1.2.2 Présentation des concours suivants

A la suite du concours 1983 diverses remarques ont été formulées qui ont donné lieu à des modifications dans l'organisation des versions suivantes; en particulier, en ce qui concerne les épreuves en Q.C.M. :

- le nombre d'exercices (40) fut perçu comme trop important : la moyenne, en 1983, fut de 25 exercices traités (complètement ou non, la forme du questionnaire ne permettant pas de distinguer une réponse complète d'une incomplète, cf. ci-dessous), 152 candidats sur 798 (statistiques France métropolitaine) ont fait plus de 30 exercices; à partir de 1984 le nombre d'exercices, pour les épreuves de mathématiques et de physique, fut limité à 30 et, au concours 1988, 24 exercices seulement furent proposés (je reviendrai ultérieurement sur les premières conséquences de cette modification),

- le fait de répondre en cochant les "bonnes" cases ne permettait pas de distinguer, pour une case non cochée, une non-réponse d'une réponse signifiant "ce n'est pas vrai" d'une réponse voulant dire "je ne sais pas répondre"; pour rendre plus précis notre notation, un nouveau type de questionnement, du type Q.C.M. de véracité stricte, fut introduit.

Chaque question comporte un texte introductif (pouvant ou non contenir une question) et cinq réponses ou propositions; pour chacune le candidat doit indiquer V ou F, dans la case correspondante, suivant qu'il la juge vraie ou fausse; toutes les combinaisons de V et de F sont a priori possibles; le candidat est prévenu que "toute case correctement remplie entraîne une bonification et il est préféré une case vide à une case mal remplie".

On trouvera ci-dessous (fig.V.1) la répartition des V et des F dans les différents concours de 1984 à 1987. On remarquera la différence très nette entre les répartitions en mathématiques et en physique : dans cette dernière matière les exercices sont presque exclusivement à une ou deux réponses "vraies" alors qu'en mathématiques on note une tendance à une augmentation du nombre d'exercices à trois réponses "vraies".

TYPE	0V	1V	2V	3V	4V	5V	
ANNEE -----							
1984	0	20	8	1	1	0	mathématiques
	0	16	14	0	0	0	physique
1985	0	12	11	6	0	1	mathématiques
	0	17	11	2	0	0	physique
1986	0	6	15	8	0	1	mathématiques
	2	12	13	3	0	0	physique
1987	2	7	8	10	3	0	mathématiques
	0	11	15	4	0	0	physique

fig.V.1 : Nombre d'exercices de mathématiques et de physique en fonction du nombre de V dans la "bonne réponse"

La correction du concours a été automatisée grâce à l'écriture d'un barème donné sous forme d'une suite d'expressions booléennes (voir fig.V.2 page suivante). Ceci permet, à l'intérieur d'un exercice, et lorsque celui-ci a été construit avec ce souci, de repérer des incohérences logiques ou de dépister des comportements de réponse indiquant qu'une "bonne" réponse à un item ne résultait sans doute pas d'un "bon" raisonnement; c'est un

L'intégrale $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan \theta \, d\theta$ est égale à :

(A) $4/3$
 (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 (C) $\frac{1}{2} \ln 3$
 (D) $\ln \sqrt{3} - 2 \ln 2$
 (E) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan \theta \, d\theta$

NUM QUEST	NUM EQU	EQUATION	VALEUR A AFFECTER
010	05	A = " "	-00.50
	10	B = " "	-00.50
	15	C = " "	-00.50
	20	D = " "	-00.50
	25	E = " "	-00.50
	30	B="F"	+01.00
	35	C="V"	+03.00
	40	D="F"	+01.00
	45	E="V"	+05.00
	50	A="V"	-10.00
	55	C="F"	-05.00
	60	D="V"	-05.00
	65	E="F"	-03.00
	70	B="V"	-10.00
	75	A="V" ET (B="V" OU C="V" OU D="V")	-10.00
	80	B="V" ET (C="V" OU D="V")	-10.00
	85	C="V" ET D="V"	-10.00
	99	P="FFVFV"	+00.00

fig.V.2 : exemple de système d'équations
de correction

moyen offert au constructeur d'exercices pour pallier la difficulté relevée par Josette ADDA (cf. <ADD88>) quant à connaître le "Pourquoi" d'une bonne réponse. On verra plus loin, dans le chapitre consacré à l'analyse didactique de certains exercices extraits des épreuves de l'E.S.I.E.E. que cette possibilité n'est pas souvent utilisée et qu'elle est d'ailleurs difficile à mettre en place.

Pour chaque exercice l'ordinateur dresse la liste de tous les types de réponses effectivement produites par au moins un candidat. Pour chacun de ces types il calcule, en fonction du barème, la note correspondante en la limitant à l'intervalle [-10,+10]. Chaque exercice est pondéré par deux poids : un poids pour les notes positives et un autre pour les notes négatives; la note obtenue par un candidat pour un exercice donné est égale au produit du poids correspondant par la note calculée d'après le barème. Ce système à double pondération permet, pour les exercices "élémentaires", de donner peu de points aux réussites mais de fortement pénaliser les erreurs; l'inverse étant fait pour les exercices difficiles. Les barèmes ne sont jamais communiqués aux candidats, ni même les poids respectifs des différents exercices. Après chaque concours, l'épreuve et les équations de correction et pondération) sont testées sur deux ou trois classes témoins de terminale C ; les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus dans ces classes durant l'année.

Il ne faut pas oublier qu'il ne s'agit pas d'épreuves destinées à une évaluation mais bien à une sélection.

Le tableau suivant donne, à titre indicatif, la répartition des notes des candidats au concours 1987.

NOTE	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	20
-----	0	9	38	35	313	389	291	143	49	17	4	2	0	0

fig.V.3 : Répartition des notes des candidats. Concours 1987

V.1.1.3 Conséquences de l'introduction du concours dans le processus de recrutement

L'introduction d'un concours pour le recrutement des élèves de l'E.S.I.E.E. a eu plusieurs effets notables:

- une amélioration des dossiers reçus en provenance des terminales C et E; ceci a permis de retenir (en pourcentage) moins de dossiers en provenance de terminale D (en effet les élèves issus de terminale D ont toujours eu du mal à suivre les enseignements de mathématiques et de physique dès leur première année à l'Ecole) :

<u>ANNEE:</u>	<u>1983</u>	<u>1984</u>	<u>1985</u>	<u>1986</u>	<u>1987</u>
Terminale C	886/642	1285/1139	1343/1213	1141/1008*	1454/1316
Terminale E	152/52	165/140	138/122	149/136	127/114
Terminale D	360/135	308/238	108/52	66/29	90/44

fig.V.4: Nombre de dossiers reçus/nombre de dossiers acceptés
pour passer le concours en fonction de l'origine des candidats (redoublants compris)

Il est certain que l'existence du concours et surtout l'envoi des rapports scientifiques à tous les professeurs de mathématiques et de physique des classes terminales concernées ont notablement changé l'image de marque de l'E.S.I.E.E. et ont contribué à la faire connaître auprès des élèves et de leurs parents.

L'expérience en cours à l'I.N.R.P., de mettre sur serveur télématique les exercices de mathématiques des précédents concours, contribuera sans aucun doute à renforcer l'intérêt de ce public pour ce type d'épreuve original dans le domaine des sciences exactes.

L'enjeu pour l'E.S.I.E.E. est toujours de drainer vers elle des candidats qui seraient capables de suivre une classe préparatoire mais qui voient un intérêt à suivre une formation incluant dès la première année des cours en informatique et dans les disciplines techniques, dans des domaines de pointe et grâce à des équipements des plus sophistiqués. Le Service des Admissions a mené, en 1985 et 86, deux enquêtes auprès des candidats qui ont eu la possibilité d'intégrer l'E.S.I.E.E. (étant sur la liste principale ou suffisamment bien placés sur la liste complémentaire pour profiter des désistements de candidats mieux placés) mais qui ont refusé:

- en 1985, 146 candidats répondirent, sur 190 interrogés; 73% d'entre eux allèrent en Math. Sup. et 24% dans d'autres écoles (principalement I.N.S.A. et Institut Supérieur d'Electronique de Paris),
- en 1986, 148 candidats sur 173 ont répondu; 59% choisirent une Math. Sup. et 37% une autre école (idem 85).

* D'après une enquête du Service des Admissions de l'E.S.I.E.E., cette baisse dans le nombre de dossiers reçus en 1986 serait liée à l'annonce du transfert de l'E.S.I.E.E. de Paris à Marne-la-Vallée et de l'incertitude qui existait alors quant aux possibilités d'hébergement. En 1987 ces problèmes étant résolus on a assisté à une forte augmentation du nombre de dossiers déposés: 1827; cette tendance s'est maintenue en 1988 où le nombre de dossiers déposés a avoisiné 2000.

La figure V.5 donne la répartition des candidats suivant l'origine socio-professionnelle des parents en 1986 et 1987. On remarquera en particulier qu'en 1987 les différentes professions se retrouvent dans des proportions identiques à ces trois stades du concours (candidats présents au concours, candidats admis sur la liste principale et candidats admis à l'Ecole); il est intéressant de noter que, en 1986, ceci ne fut pas le cas : les enfants des "professions libérales", admis en liste principale, se désistèrent plus que la moyenne des candidats, puisque présents pour 10% au concours et sur la liste principale, ils ne représentaient plus que 4% des élèves entrants à l'E.S.I.E.E..

Catégories socio-professionnelles	Nombre de candidats présents au concours		Admis liste principale		Entrés à l'E.S.I.E.E.	
	1986	1987	1986	1987	1986	1987
Ingénieurs/Cadres techniques d'entreprises	506 (33%)	562 (31%) (35%)	71	87 (35%)	(%)	49 (32%)
Cadres fonction publique	88 (6%)	98 (5%)	15 (7%)	13 (5%)		8 (5%)
Professions libérales	145 (10%)	178 (10%) (10%)	21	24 (10%)	4 (4%)	16 (10%)
Professeurs, professions scientifiques	90 (6%)	109 (6%)	13 (7%)	15 (6%)	4 (4%)	8 (5%)
Chefs d'entreprise (10 salariés et plus)	86 (6%)	114 (6%)	10 (5%)	16 (6%)	8 (8%)	13 (8%)
Techniciens + contremaîtres	114 (8%)	127 (7%)	12 (6%)	11 (4%)	(%)	8 (5%)
Artisans + Commerçants	86 (5%)	110 (6%)	10 (5%)	8 (3%)	6 (6%)	5 (3%)
T O T A L	1520	1823	201	251	106	155

fig.V.5 : Origine socio-professionnelle des parents des candidats

V.1.1.4 Problème ouvert sur des questionnements fermés.

On peut, légitimement, se poser la question du rapport entre les résultats au concours et les résultats obtenus ensuite en mathématiques et en physique durant la scolarité à l'E.S.I.E.E.. Teste-t-on les mêmes "choses" avec des épreuves "classiques", genre problème de baccalauréat, et des épreuves en Q.C.M.? En 1986, la corrélation entre note au concours et note au baccalauréat fut de 0,23 en mathématiques et de 0,31 en physique, c'est peu et cela confirme notre opinion qu'à la question précédente il faut sans doute répondre non. On pourra aussi s'inspirer de l'entrevue, donnée plus loin, avec un "parfait QCMiste", brillant lors

d'épreuves en Q.C.M. et moyen (il a même dû redoubler sa première année à l'E.S.I.E.E.) aux épreuves classiques.

Pour Daniel LACOMBE cette faible corrélation serait due à la grande homogénéité du groupe étudié; en effet il s'agit des candidats pour lesquels nous connaissons la note de mathématiques et celle de physique au baccalauréat; ce sont donc des candidats de la liste principale et ceux qui étaient suffisamment bien placés sur la liste complémentaire et, qui plus est, des candidats suffisamment motivés pour prendre la peine de retourner à l'E.S.I.E.E. leur résultat au baccalauréat. Cet ensemble de candidats est donc certainement très homogène tant au niveau de leur réussite au concours qu'à celui au baccalauréat.

Il faut néanmoins remarquer que la différence fondamentale existant entre les épreuves de type baccalauréat et les épreuves des concours de l'E.S.I.E.E. réside plus dans l'importance du facteur temps que dans la forme Q.C.M.. Comme on le voit dans l'entrevue avec le QCMiste, les candidats sont principalement testés sur leur aptitude à réagir rapidement et non à se concentrer sur un problème et à approfondir un sujet.

Le débat reste ouvert : est-il intéressant pour l'E.S.I.E.E. de recruter des gens rapides, quitte à laisser entrer des élèves peu aptes à "creuser" des questions ?

V.1.2 L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES AU CONCOURS DE L'E.S.I.E.E. (ASPECTS MÉTHODOLOGIQUES & ASPECTS DIDACTIQUES)

V.1.2.1 Méthodologie de construction

Comme je l'ai indiqué au chapitre I, les exercices proposés sont des Q.C.M. de véracité stricte pouvant être regroupés en deux catégories :

type 1: $X \rightarrow \{P_i(X) / 1 \leq i \leq 5\}$

l'énoncé de départ définit un objet X et est suivi de cinq propositions portant sur des propriétés de X,

type 2: $X \rightarrow \{P_i = X / 1 \leq i \leq 5\}$

l'énoncé introduit une expression X, le candidat doit indiquer, parmi les 5 choix proposés ensuite, ceux qui sont égaux à X.

La répartition des exercices, suivant ces deux types, est donnée dans le tableau ci-dessous.

\ TYPE	1 (X → P _i (X))	2 (X → P _i =X)
ANNEE-----	-----	-----
1984	14	16 (dont 1 à 2V)
1985	19	11 (dont 1 à 3V)
1986	23	7 (dont 2 à 2V)
1987	28	2 (dont 1 à 2V)

fig.V.6 : Nombre d'exercices des différents types

On constate une évolution de la répartition des exercices: les correcteurs donnent plus d'importance au type 1 qui s'éloigne du type classique des Q.C.M. et leur offre plus de possibilités que le type 2 dont la diminution est très nette.

En regardant les résultats obtenus sur les exercices de chaque type, on note une grande différence, principalement au niveau des réussites globales; ceci s'explique sans doute par le fait que pour le type 2, à quelques rares exceptions près, avoir trouvé la bonne réponse permet de répondre aux quatre autres, alors que pour le type 1 le candidat doit examiner jusqu'à cinq propositions sans parfois pouvoir tirer profit de la connaissance de l'une pour conclure quant à une autre.

On doit cependant faire une remarque sur ce que l'on entend par "logique"; on peut trouver, de fait, différents comportements "logiques":

- (A) la logique purement mathématique, celle que l'auteur des questions est supposé bien connaître et le candidat peut-être un peu moins ! (par exemple: si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I),

- (B) la logique du "bon-candidat-à-un-concours-en-QCM", comme je l'ai mentionné au chapitre I au sujet du type 2 (les candidats qui choisissent 2 réponses apparemment contradictoires en pensant qu'au moins l'une d'entre elles est correcte), celle qui fait intervenir deux paramètres non mathématiques (au sens de "sans lien direct avec les notions mathématiques mises en jeu dans l'épreuve"), à savoir le temps imparti pour traiter 24 ou 30 exercices, et le barème tel que l'imagine le candidat (cf. <LEC88>),

- (C) enfin, la "logique du questionné" (valable quelle que soit la situation et le type de questionnaire scolaire), à savoir : quelle réponse attend de moi le questionneur? quel piège m'a-t-il tendu? quelle partie du programme est concernée par cette question? Cette logique pouvant d'ailleurs être inspirée de la logique habituelle du discours non mathématique.

		Type 1	Type 2	TOTAL
1984	%Réussites	20	43	32
	%Non rép.	22	20	22
1985	%Réussites	19	40	32
	%Non rép.	26	26	23
1986	%Réussites	20	34	24
	%Non rép.	21	22	21
1987	%Réussites	14	48	16
	%Non rép.	24	16	22

fig. V.7 : Moyennes des pourcentages de réussites et de non réponses suivant les types d'exercices

Dans les exercices de type 1, il s'agit, pour l'auteur, de la logique (A) à prendre en compte, ne serait-ce que pour confirmer que le candidat a une connaissance correcte des propriétés de l'objet X; pour l'élève, en revanche, il peut s'agir de la logique (C); ainsi par exemple, que plus de 59% des candidats de 87 trouvent que la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^{|x-1|}$ est continue sur \mathbb{R} mais pas continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ ne prouve pas que plus de la moitié des élèves de terminale sont illogiques ! mais bien qu'ils suivent un logique autre que la (A) (illustration sans doute du principe du maximum d'information : la propriété étant vraie sur tout un ensemble il n'est pas accepté de donner une information moins "riche" portant simplement sur un sous-ensemble). J. CHASTENET de GERY pense que pour certains candidats la fonction n'est plus "définie" en 1 et qu'elle n'est donc pas continue en ce point.

V.1.2.2 Les stratégies de réponse à l'épreuve complète. Leur évolution.

Comme le montrent les histogrammes ci-dessous (fig. V.8-1, -2, -3, -4), les candidats ne délaissent pas les exercices se trouvant en fin d'épreuve. On notera une sensible différence entre l'histogramme de 1985 (fig.V.8-2) et les trois autres, ceci est dû au fait que, pour ce concours, les exercices avaient été classés par ordre -supposé- croissant de difficulté (la corrélation entre le rang de l'exercice et le pourcentage de candidats s'étant abstenus à cet exercice le confirme, même en 1988 :

1984 : $r = 0,27$ 1985 : $r = 0,59$ 1986 : $r = 0,20$ 1988 : $r = 0,20$).

L'une des méthodes consiste à parcourir l'ensemble du texte en faisant au passage le plus d'exercices paraissant abordables, puis de faire un second parcours pendant le temps qui reste (cf. l'interview d'un "QCMiste"). Nous savons d'autre part que nombre de professeurs de terminale font travailler leurs élèves sur les textes des concours de l'E.S.I.E.E.. Sans avoir réellement de preuves à ce sujet, on peut penser que des élèves peuvent s'entraîner à ce type de concours où la rapidité est un élément essentiel, où il faut bien, du premier coup d'œil, voir si un exercice est dans son champ de connaissances et s'il ne prendra pas trop de temps pour le résoudre, où il faut savoir repérer des cohésions logiques, profiter d'éléments ne permettant pas de trouver l'expression qui résoudrait tout l'exercice mais permettant d'éliminer certaines propositions, où il faut passer d'un champ de connaissances à un autre en quelques minutes,... Les capacités mises en oeuvre dans une telle épreuve me semblent différentes de celles liées à la résolution des problèmes de type "baccalauréat" pendant lesquels le candidat doit se concentrer sur une (ou deux) partie(s) du programme et fournir des explications avec ses résultats. Le "QCMiste" que j'ai interviewé illustre la possibilité d'être bien adapté aux Q.C.M. en temps très limité et de l'être beaucoup moins bien pour les épreuves classiques, en revanche nous n'avons pas trouvé d'exemple aussi marquant de

"bon" élève, au sens classique du terme, qui ait de très mauvais résultats à des Q.C.M.. Ceci doit, bien entendu, être relativisé : les concours de l'E.S.I.E.E. sont aussi d'un type particulier de questionnaires parce que le nombre de Q.C.M. est très élevé pour un temps de passation très bref; il n'est pas évident que les résultats seraient identiques, et en particulier que le classement des candidats serait reproduit, dans le cas d'une épreuve ayant les mêmes exercices mais avec une durée de 4 heures (comme au baccalauréat) au lieu de 2 heures comme actuellement.

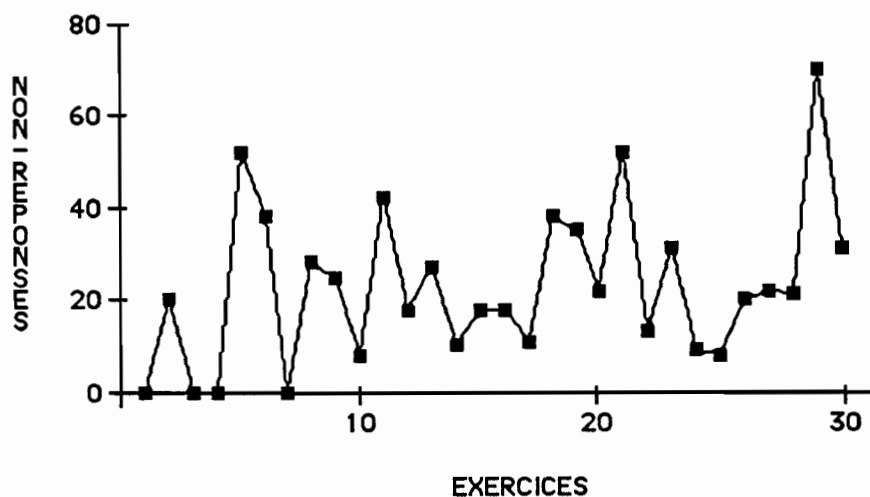


fig. V.8-1: Taux de non réponses à chaque exercice. Concours 84

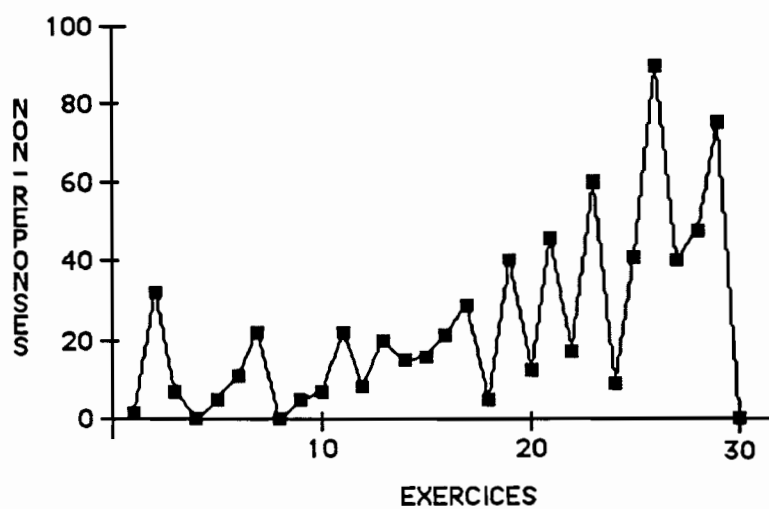


fig. V.8-2: Taux de non réponses à chaque exercice. Concours 85

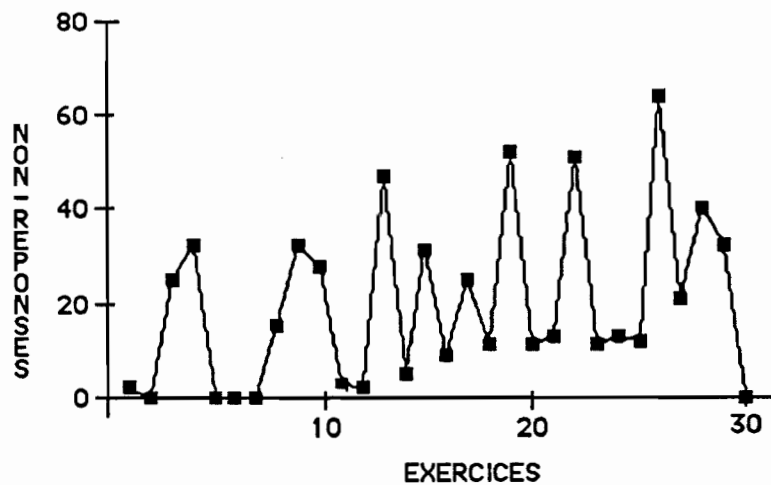


fig. V.8-3: Taux de non réponses à chaque exercice. Concours 86

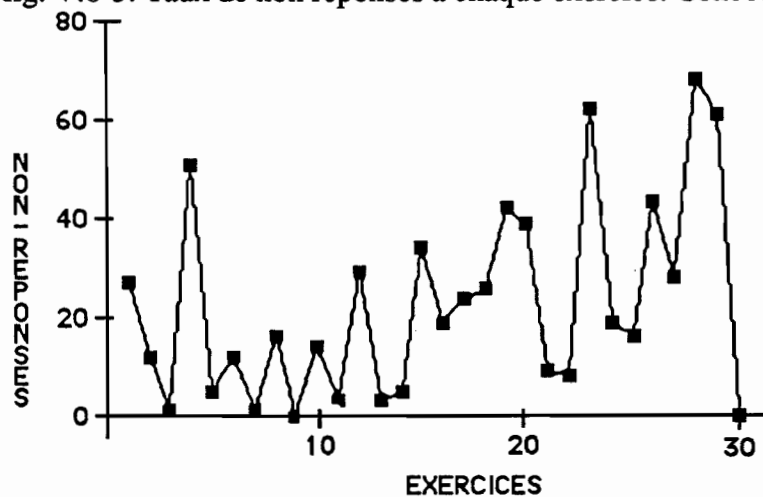


fig. V.8-4: Taux de non réponses à chaque exercice. Concours 87

En regardant les résultats globaux des années 1984 à 1987, on est amené à constater néanmoins un changement d'attitude des candidats : ils semblent traiter plus d'exercices (c'est-à-dire que l'on note moins d'abstentions) mais en réussissent complètement (c'est-à-dire avec 5 réponses correctes) un plus petit nombre (cf. fig.V.9).

	Moyenne des réussites	Moyenne des abstentions
1984	32	22
1985	32	23
1986	24	21
1987	16	22

fig. V.9 : Moyennes des pourcentages des réussites complètes et des abstentions entre 1984 et 1987

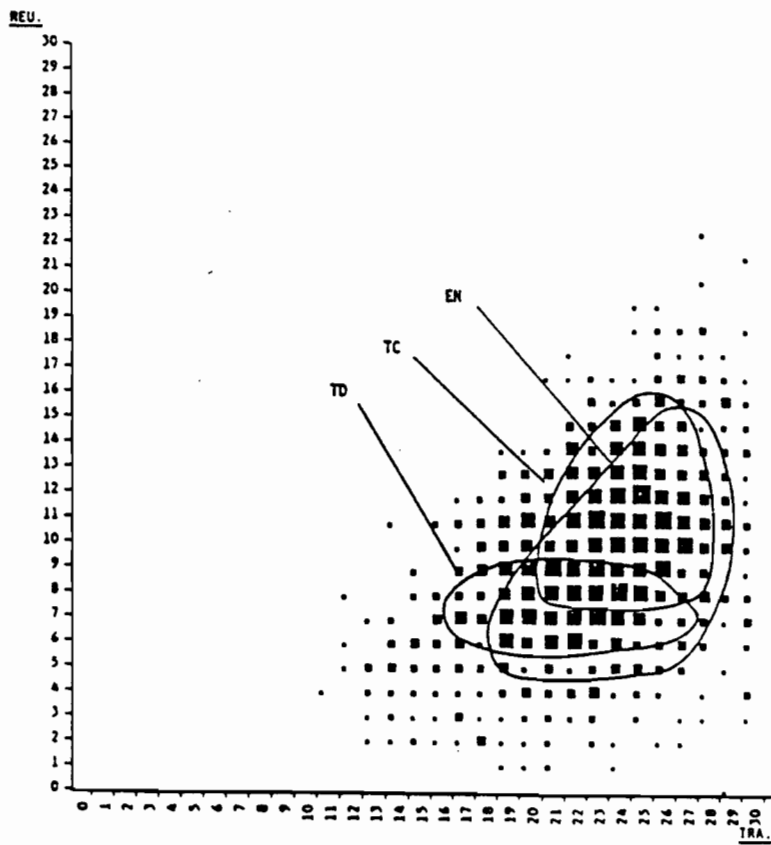
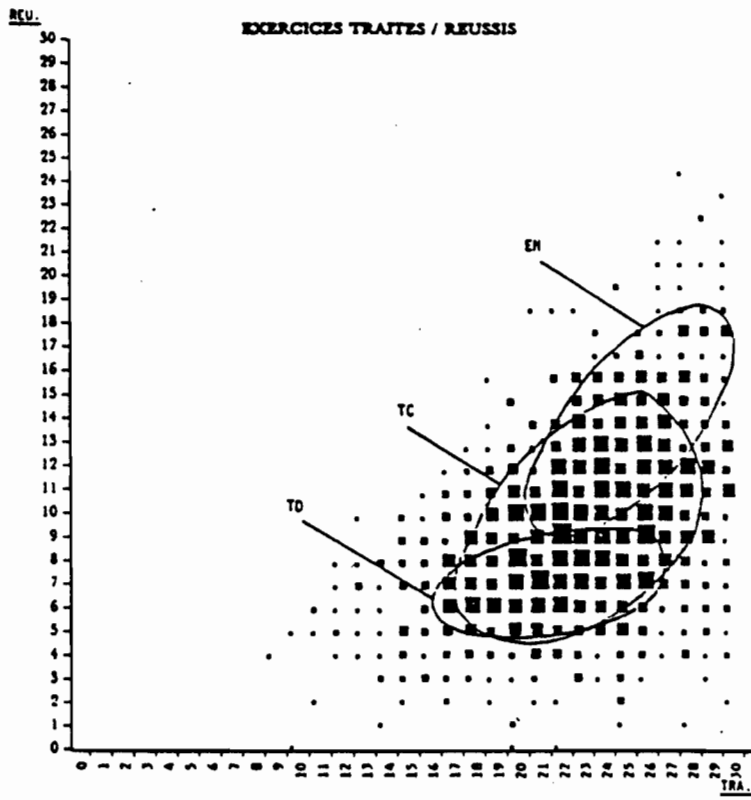


fig. V.10-1/2 : Exercices traités/exercices réussis . Concours 84/85

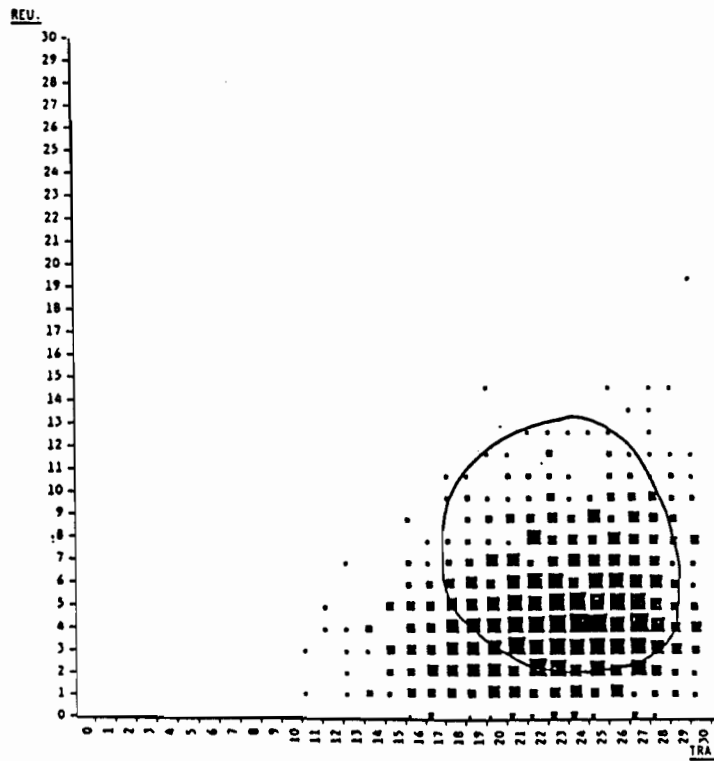
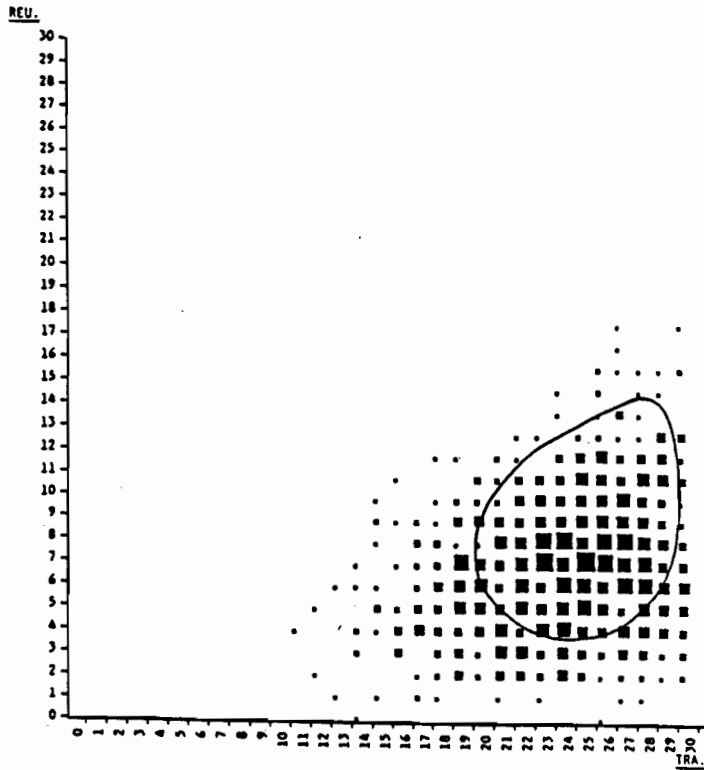


fig. V.10-3/4 : Exercices traités/exercices réussis . Concours 86/87

Cette baisse de la moyenne des pourcentages de réussites est contraire à ce que l'on aurait pu attendre vu l'amélioration du niveau des candidats (relativement à leur niveau dans leurs classes respectives : à l'heure actuelle ces candidats se situent dans la moitié voire le tiers supérieur de leurs classes). Un explication pourrait être la modification de la composition des concours comme vue précédemment: les exercices de type 1 sont, d'une part, plus difficiles que ceux du type 2; or ces derniers sont de moins en moins nombreux d'une année sur l'autre et, d'autre part, plus longs à résoudre complètement.

Cette évolution se retrouve dans les nuages obtenus en prenant en abscisse le nombre d'exercices traités et en ordonnée le nombre d'exercices complètement réussis et en plaçant à cette intersection un carré dont l'aire est proportionnelle au nombre de candidats ayant ces deux caractéristiques (fig.V.10-1,-2,-3,-4) : le nuage se déplace nettement vers la droite (plus d'exercices traités) et vers le bas (moins d'exercices complètement réussis).

Il est intéressant de noter une corrélation négative non négligeable entre le rang de l'exercice et son taux de réussite, amplifiée évidemment en 1985 où, comme il a été dit plus haut, les exercices avaient été ordonnés:

1984 : $r = -0,50$ 1985 : $r = -0,67$ 1986 : $r = -0,64$ 1987 : $r = -50$

On peut imaginer différentes causes à cette situation mais la fatigue en est certainement la raison principale.

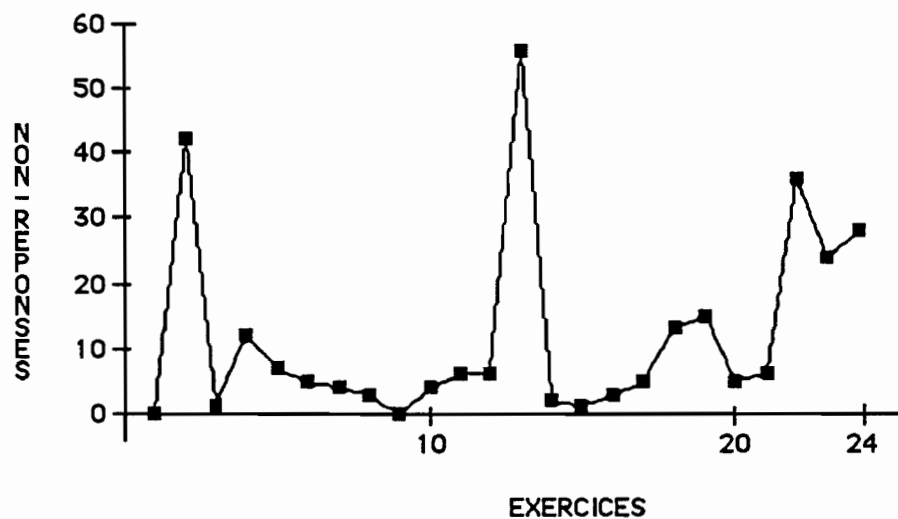


fig.V.11 : Taux de non réponses aux exercices du concours 1988

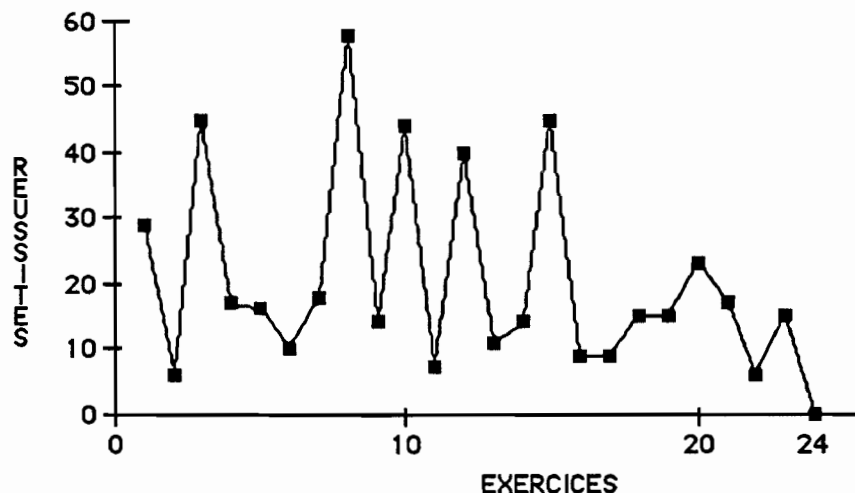


fig.V.12 : Taux de réussite aux exercices du concours 1988

La situation est différente en 1988 où le concours ne comportait plus que 24 exercices. La moyenne des pourcentages de réussites remonte à 20% tandis que celle des abstentions n'est plus que de 12%. Quant à la corrélation entre le rang de l'exercice et le taux de réussite elle n'est plus que de -0,30. Même si l'on admet que la population est, "relativement" à l'ensemble des élèves de terminales C et E, scolairement meilleure que les années précédentes, il faut sans aucun doute attribuer à la diminution du nombre d'exercices au concours la plus grande part de responsabilité dans cette évolution de comportement.

V.1.2.3 Des connaissances sur les connaissances des candidats. Leur évolution.

Outre un usage de sélection pour l'entrée à l'E.S.I.E.E., de tels exercices, proposés à plus d'un millier d'élèves chaque année, offrent aux professeurs de l'Ecole une connaissance globale des performances et lacunes de leurs nouveaux élèves et aux didacticiens une mine de renseignements !

A partir des résultats des quatre derniers concours il est aussi possible d'observer des variations dans les connaissances et les performances des élèves de terminale. Des précautions sont bien entendu à prendre pour ne pas conclure hâtivement, qui d'une "baisse dramatique du niveau", qui d'une "nette amélioration de la situation". N'ayant jamais eu la charge de définir un quelconque programme de mathématiques pour les classes concernées, je n'ai à défendre ni les anciens programmes et modes de sélection des élèves à l'entrée en terminale, ni les nouveaux. Je soumetts à l'esprit critique du lecteur quelques éléments de réflexion fondés sur l'observation des résultats obtenus à certains exercices. Ils ont l'avantage d'avoir été réellement posés à de vrais élèves en fin de terminale dans des conditions identiques et passés par un très grand nombre de candidats pour former un échantillon

représentatif d'au moins la moitié supérieure des classes terminales scientifiques des établissements publics et privés français. Si l'échantillon varie d'une année sur l'autre, comme il a été dit dans mon texte précédent sur les concours de l'E.S.I.E.E., c'est vers une amélioration globale relative, c'est-à-dire qu'en 1987 les candidats retenus pour le concours étaient -par rapport à leur classe- meilleurs dans leur ensemble que ceux du concours 84.

Le cas échéant je présenterai les résultats obtenus lors d'exercices similaires dans différentes années.

V.1.2.3.1 Exemples 1: Trigonométrie

En 1983, 49% des candidats semblaient savoir que pour tout x réel $\sin(x + 3\pi/2)$ est égal à $-\cos x$ (exercice n°1); 2% des candidats s'étant abstenus, 30% avaient choisi $\cos x$, 13% avaient préféré $-\sin x$ et très peu en revanche avaient été séduits par $\sin x$ ou $-\operatorname{tg} x$. La même année 77% des candidats trouvèrent correctement que $5\pi/4$ est solution de l'équation $\sin x = \cos x$ (exercice n°2).

En 1984, ce sont 80% des candidats qui répondaient que pour tout x réel $\cos(5\pi/2 - x)$ est égal à $\sin x$, avec 0% de non réponses (exercice 4).

Pour l'exercice 2, 40% répondent correctement au fait que l'expression: $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ soit égale, à la fois, à $2\cos(2x - \pi/6)$ et à $2\sin(2x + \pi/3)$; avec 22% de non réponses.

En 1985, 64% n'oubliaient aucune des trois réponses exactes possibles pour $\cos(-31\pi/4)$, à savoir: $\sqrt{2}/2$, $-\cos(3\pi/4)$ et $\sin(3\pi/4)$, avec 1% de non réponses (exercice 1). L'exercice 11 fut réussi par 38% des candidats, 22% s'étant abstenus; il s'agissait de repérer que $5\pi/6$, $\pi/6$ et $-7\pi/6$ sont solution de l'équation: $2\sin^2 x - (1 + 2\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$.

En 1986, l'exercice 3 demandait de retrouver l'ensemble des solutions, sur $[0, 2\pi]$, de l'inéquation $(2 \cos x - 1)(1 - 2 \sin x) \leq 0$; 49% réussirent et 25% s'abstinrent.

Soit l'équation (1) : $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$

(A) pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $(4k + 1) \frac{\pi}{2}$ est racine de (1)

(B) pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$ est racine de (1)

(C) pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $2k\pi$ est racine de (1)

(D) (1) n'admet aucune racine dans \mathbf{R}

(E) dans \mathbf{R} , (1) admet les mêmes racines que l'équation : $\sin x + \cos x = 1$

fig.V.13 : exercice 6. Concours 1987

En 1987, l'exercice n°6, n'obtint que 22% de réussites complètes et 12% d'abstentions; en particulier 28% des candidats répondirent correctement aux quatre premières propositions mais choisirent F pour (E). On peut rapprocher ce résultat de celui obtenu avec l'exercice n°31 du concours 83 où 24% des candidats trouvèrent correctement que l'expression $(3/\sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6}/2) \sin x$ peut se mettre sous la forme $R \cos(x+a)$ avec $R=\sqrt{6}$ et $a=-\pi/6$.

V.1.2.3.2 Exemples 2: Suites

En 1984, pour l'étude de la limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$ pour n tendant vers $+\infty$,

15% des candidats répondirent correctement, 64% firent l'erreur attendue en choisissant 1, 6% pour $+\infty$ et 4% pour 2. Le taux d'abstention fut de 8%.

En 1986 un exercice analogue fut posé, il portait sur la limite de la suite définie par:

$$u_n = \left[\frac{n}{n+1} \right]^n$$

Cet exercice fut réussi par 12% des candidats; le taux de non réponses fut de 9% seulement. Les autres réponses proposées: 1, e et 0 obtinrent respectivement (réponses complètes avec 1 V et 4 F): 52%, 7%, 12%. La dernière possibilité, 2, n'attira pour ainsi dire aucun candidat.

Il est intéressant de remarquer qu'en 1984 la réponse 2 pouvait correspondre à une erreur de raisonnement (de type utilisation d'un "équivalent") différente de celle conduisant à la réponse $+\infty$ (à cause de: $1 + 1/n > 1$) alors que pour la suite donnée en 1986 ces deux erreurs conduisaient à la même réponse: 0 (car $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$);

on trouve d'ailleurs dans un cas 6% et 4%, et dans l'autre 12%; la réponse 2 ne correspond plus à une erreur plausible ce qui explique les résultats mentionnés ci-dessus.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n+1}}, \text{ alors :}$$

- (A) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
- (C) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- (D) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite
- (E) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n| < 1$

fig. V.14 : exercice n° 2 . Concours 1987

V.1.2.4 Des exercices mal construits. Des exercices bien construits.

Précisons tout d'abord en quoi des exercices de type Q.C.M. peuvent être bien ou mal construits.

On a vu que les types définis précédemment pouvaient conduire à des problématiques de correction différentes, que certains donnaient lieu à des exercices nettement plus difficiles, statistiquement, que d'autres et que la variation de leurs pourcentages respectifs pouvait conduire à une variation dans la difficulté d'un concours.

La construction des exercices requiert donc une attention particulière de la part de l'équipe de conception; celle-ci doit faire porter sa réflexion sur des éléments qui, suivant la définition d'un questionnement donnée au chapitre I, vont former un tout indissociable : le texte de la question, la liste des équations de correction, le tout en fonction d'objectifs d'évaluation clairs.

Les problèmes se posent différemment aux auteurs au moment de la première étape, celle de la construction du texte de la question, suivant le type d'exercices. Dans le cas du premier type il s'agit de distinguer les candidats ayant une bonne connaissance de l'objet X et des propriétés qui lui sont attachées, des candidats risquant de répondre correctement par analogie, par flair ou, pire encore, pour des raisons incorrectes, la réponse purement "au hasard" étant supposée négligeable en raison du grand nombre de réponses possibles. Les 5 propositions devraient donc, dans le cas d'un exercice bien construit, permettre à la fois de poser les "bonnes" questions et de s'assurer, par d'autres questions, que les raisonnements suivis étaient, eux aussi, corrects. Jacques WEBER propose un modèle où l'exercice comporte trois questions indépendantes sur l'objet X et deux questions de vérification. On peut aussi imaginer qu'un autre exercice dans l'épreuve puisse servir à vérifier la cohérence des réponses.

Un exercice mal construit de type 1 est un exercice pour lequel il n'existe aucun moyen de vérifier si les raisonnements sous-jacents sont ou non corrects.

Dans le cadre du concours, un aspect important d'un exercice bien construit (et là intervient le travail de la seconde phase, c'est-à-dire la liste des équations de correction et le barème) est d'être discriminatoire. Il est inutile que tous les candidats réussissent, que tous échouent, ou, plus généralement, que tous aient le même comportement de réponse. Un tel exercice pourrait, peut-être, rendre service aux didacticiens cherchant à dessiner le profil des connaissances et des lacunes des élèves de terminale, mais il ne permettrait pas d'effectuer une bonne sélection des candidats. La liste d'équations de correction doit prendre en compte les difficultés respectives des 5 propositions mais aussi les liens logiques existant entre elles; liens logiques que l'on doit trouver dans le cas d'un exercice bien construit si l'on veut s'assurer tant soit peu du bien fondé des points positifs qui seront attribués aux "bonnes" réponses. Les auteurs doivent aussi tenir compte du fait que les équations seront toutes

passées en revue par le programme informatique de correction et que les points vont s'accumuler ou se retrancher au fur et à mesure; il faut donc que les auteurs envisagent les différentes situations possibles, parmi les 2^5 théoriques, pour être sûrs de ne pas arriver à des notes aberrantes au bout du compte.

V.1.2.4.1 Exemple d'exercice de type 1 bien construit

L'exercice 17 du concours 1984 (texte ci-dessous), offre des propositions ayant attiré des pourcentages importants de candidats vers les réponses fausses sans être globalement dissuasif puisque seulement 10% des candidats se sont abstenus. Il a été discriminatoire en particulier grâce à 11% de bonnes réponses et à la répartition suivante :

mauvaises réponses: (A) 51% (B) 23% (C) 30% (D)14% (E) 10%

Du point de vue de la cohérence des erreurs, on peut être étonné des 21% seulement de candidats ayant choisi (A) vrai et (C) vrai au vu des pourcentages obtenus aux réponses (A) et (C).

Pour toute fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et telle que $|f|$ soit continue en x_0 :

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

(B) $(\forall x \in I), |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

(C) f est continue en x_0

(D) $x \rightarrow [f(x)]^k$ est continue en x_0

(E) $(\forall x \in I), f(x) = f(x_0) + |x-x_0| (1 + a(x))$
avec $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0$

F	
Y	
F	
V	
F	
%	11 10

fig.V.17 : Exercice n°17, concours 1984

V.1.2.4.2 Exemple d'exercice de type 1 mal construit

L'exercice 19 du concours 1986 (texte ci-dessous) ne présente pas beaucoup d'intérêt : très peu de bonnes réponses (2%) et très peu d'information par comparaison des différentes questions, en particulier entre les réussites à (B), à (C) et à (D).

On reste néanmoins surpris que 52% des candidats se soient abstenus devant un exercice relativement "classique". Roger CUPPENS avance l'hypothèse d'une peur des candidats de perdre beaucoup de temps dans de longs calculs.

Pour tout réel m appartenant à $[0,1]$ le polynôme P_m défini par:

$$P_m(x) = x^3 + m^2x - 2m$$

- (A) a trois racines réelles distinctes
- (B) a une unique racine réelle
- (C) a une unique racine réelle dans $[0,1]$
- (D) n'a pas de racine réelle strictement négative
- (E) n'a pas de racine réelle strictement supérieure à m

fig.V.16 : Exercice n°19. Concours 1986

V.1.2.4.3 Exemple d'exercice de type 2 bien construit

Dans le cas des exercices de type 2, un exercice bien construit est un exercice pour lequel les 5 valeurs proposées pour X ont des "chances" réelles d'être choisies par une proportion non négligeable des candidats. Ceci ne peut se produire qu'avec une bonne connaissance didactique du domaine considéré et des erreurs de raisonnement possibles. A l'heure actuelle cette réflexion s'appuie plus sur l'expérience des auteurs que sur une véritable expérimentation préalable. Ce qui explique que certains exercices se soient avérés mal construits a posteriori, comme on le verra sur les exemples ci-dessous, en raison de réponses proposées très peu attractives et ne correspondant donc pas à de réelles erreurs d'élèves de terminale. Bien entendu notre pratique nous permet, d'une année sur l'autre, d'améliorer nos connaissances didactiques par le fait que nous apprenons quelles sont les réponses attractives et celles qui ne le sont pas; en revanche, tant que nous n'utiliserons pas une procédure expérimentale préalable avec des questionnements ouverts nous ne pourrons pas prévoir quelles seraient les réponses à prendre en compte parce qu'elles correspondent à des erreurs d'élèves auxquelles nous n'aurions pas pensé.

De fait, si nous voulions conserver des exercices du type 2, par exemple pour ne pas rendre trop difficile le concours, sans lui faire perdre son intérêt sélectif, il nous faudrait mettre en place, par exemple en liaison avec des équipes de recherche universitaires ou de l'I.N.R.P., des pré-questionnaires papier-crayon, informatiques ou télématiques permettant une étude systématique et statistique plus fine.

L'exercice 21 du concours 84 (voir texte ci-dessous) prenait bien en compte la possibilité pour les élèves de répondre partiellement tout en montrant certaines de leurs connaissances sur les développements limités, en particulier en faisant jouer la parité et le terme constant; les résultats ont été les suivants:

Non réponses: 53% Réussites complètes: 18%

Réponse F à (A) et à (B), rien ailleurs: 8%

Réponse F à (A), (B) et à (C), rien ailleurs: 8%

Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de la fonction $x \rightarrow \frac{x^2}{2} + \sqrt{x^2 + 4}$

est (avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$)

(A) $4 + x^2 + x^3 \epsilon(x)$

(B) $4 + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \epsilon(x)$

(C) $2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + x^3 \epsilon(x)$

(D) $2 + \frac{3}{4}x^2 + x^3 \epsilon(x)$

(E) $2 + x^2 + x^3 \epsilon(x)$

F		F	F
F		F	F
F			V
V			F
F			F

Σ 18 53 8 6

fig. V.17 : Exercice n°21. Concours 1984

V.1.2.4.4 Exemple d'exercice de type 2 mal construit

L'exercice 4 du concours 85, où il s'agissait de trouver la dérivée de la fonction définie par $f(x) = x e^x + \ln(x^2+1)$, parmi cinq fonctions, fut réussi par 98% des candidats et ne présente donc aucun intérêt dans le cadre d'une épreuve de sélection.

La fonction f définie par $f(x) = x e^x + \ln(x^2+1)$ admet pour dérivée la fonction f' :

(A) $f'(x) = e^x + 1 + \frac{2x}{x^2+1}$

(B) $f'(x) = (x+1) e^x + \frac{1}{x^2+1}$

(C) $f'(x) = (x+1) e^x + \frac{2x}{x^2+1}$

(D) $f'(x) = x e^x + \frac{1}{x^2+1}$

(E) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2+1}$

	F
	F
	V
	F
	F
%	98%

fig. V.18 : Exercice n°4 . Concours 1985

V.1.3 QUELQUES REMARQUES PROSPECTIVES

Dernier point non résolu : ces exercices restent, dans leur essence, résolument classiques et il n'est pas tenu réellement compte, au moment de leur construction ou de leur choix, d'une quelconque valeur prédictive.

De fait, notre réflexion est loin d'être achevée sur le thème : que faut-il demander à un élève de terminale pour être sûr qu'il pourra suivre avec profit et sans trop de problèmes les enseignements de l'E.S.I.E.E.? Comment, en particulier, tenir compte du fait que l'on cherche de futurs ingénieurs et non de futurs mathématiciens ou physiciens?

Si l'on passait d'un concours en deux heures à un concours en quatre heures, il serait sans doute possible de diminuer le facteur vitesse et avoir recours à des tests demandant plus une réflexion de synthèse.

V.1.4 INTERVIEW D'UN PARFAIT QCMiste

Contrastant avec mes autres travaux s'appuyant sur de grandes populations, je présente ici une entrevue avec un étudiant de l'E.S.I.E.E., réalisée en décembre 1987, non pas en vue d'une quelconque généralisation mais à titre de document complémentaire sur les concours de cette école d'ingénieurs.

Pour préserver son anonymat je me bornerai ici à le désigner par Bertrand. L'interviewé n'a pas été choisi au hasard mais parce qu'il présentait les caractéristiques de ce que j'appellerais un "parfait QCMiste". Bertrand, en effet, semble particulièrement brillant dans les épreuves de type Q.C.M.; ainsi lors de son concours d'entrée à l'Ecole il est classé 168ème sur plus de 1200 candidats, à une épreuve de logique il obtient 20/20 et 18/20 à l'enquête sur "limites et infini". Lorsque, à titre de test, le concours 1987 est passé par sa promotion, Bertrand se retrouve second. Cependant ses résultats, à la fin de la première année, ne sont pas suffisants pour qu'il passe en seconde année; c'est ce qui attire l'attention de ses professeurs et lui vaut cette entrevue.

Comment expliquer cette situation?

Il faut tout d'abord noter que les épreuves très bien réussies par Bertrand sont celles qui portent sur les contenus du niveau de terminale ou bien sur un morceau très court et peu technique du programme de première année, à savoir la logique. Lors d'une épreuve d'analyse portant sur des contenus plus difficiles Bertrand obtint un score médiocre.

Si l'on se limite aux contenus du niveau de terminale, on constate que Bertrand se distingue de deux manières : d'une part, vis à vis de ses propres performances, son résultat au concours est supérieur à ceux obtenus aussi bien durant son année de terminale qu'au baccalauréat et, d'autre part, il apparaît nettement mieux placé dans sa promotion lors des épreuves en Q.C.M. que lors des épreuves "classiques".

L'entretien, ci-dessous retranscrit, offre quelques pistes pour comprendre ce phénomène : tout d'abord Bertrand apparaît comme un étudiant à l'esprit rapide, capable de passer d'un thème à un autre très aisément. On apprend en particulier qu'il a pu traiter, en 1 heure 30, près de 20 exercices sur les 30 proposés. Autre information : Bertrand n'aime pas les efforts prolongés sur un thème unique; la concentration n'est sans doute pas son point fort. Les épreuves "classiques" ne lui sont pas favorables. Dernier point pouvant être relevé : Bertrand s'est entraîné à passer ce genre d'épreuve. Il avait même acquis une certaine méthode, apparemment "payante", consistant à traverser une première fois, et dans l'ordre, l'ensemble de l'épreuve, à aller jusqu'au bout de chaque exercice lui semblant à sa portée pour n'y plus revenir, puis, dans un second temps, plus court, à reprendre, par ordre de difficulté apparente, les exercices restants.

Le cas de Bertrand illustre bien le risque qui est pris avec une épreuve de concours où la vitesse est un facteur très important. On privilégie ainsi des élèves ayant certes des connaissances (condition nécessaire comme Bertrand a pu le constater en obtenant un mauvais score lors du Q.C.M. d'analyse du niveau 1ère année) mais surtout capables de passer d'un sujet à l'autre en un temps très bref, au détriment d'élèves plus lents mais peut-être plus aptes à mener des études en profondeur. Cette situation est d'autant plus importante à prendre en compte qu'il s'agit en l'occurrence d'un concours et que l'ordre d'arrivée des candidats est donc essentiel.

-+-+--+--+--+-

- B.D. Je vous ai demandé de m'accorder cette entrevue puisque, paraît-il, vous êtes un cas à l'E.S.I.E.E., c'est-à-dire que vous semblez avoir un comportement différent suivant que vous passez une épreuve classique de mathématiques ou une épreuve de type Q.C.M.. Est-ce que vous vous souvenez des notes que vous aviez eues, en moyenne, en terminale en mathématiques ?
- Bertrand Dans l'année je devais avoir 11 de moyenne en math.
- B.D. Et au bac, vous avez eu combien ?
- Bertrand J'ai eu 12
- B.D. Quand vous avez passé le concours en 86, vous êtes arrivé bien classé: 168ème sur 1213 candidats, cependant vous avez dû redoubler votre première année. Lors de cette première "1ère année", c'est-à-dire en 86-87, vous avez eu à passer de nouvelles épreuves de type QCM...
- Bertrand Oui, c'était une épreuve de logique; j'ai eu 20; puis une épreuve sur les limites où j'ai eu 18. On nous a aussi fait passer les épreuves de math du concours 87 où j'ai eu 15,5.
- B.D. Par rapport aux gens qui étaient dans la même promotion, 15,5, ça correspondait à quoi ?
- Bertrand J'étais second de la promo
- B.D. Bien, alors si l'on regarde les notes que vous avez eues dans les épreuves normales en math en 86-87, votre moyenne et votre place, c'étaient quoi
- Bertrand Ma moyenne en math était de 10,6, ma place, je pense que je devais être 80 ou 90ème...
- B.D. Vous étiez combien dans la promo ?
- Bertrand 120.

- B.D. Donc, c'est clair qu'il y a un comportement différent. Est-ce que cela vous paraît normal? Ou est-ce que cela vous étonne, cette différence ?
- Bertrand Je trouve ça plus facile que les examens officiels, parce qu'il y a une approche différente des questions: par exemple, dans le cas où on ne trouve pas de solution, on peut partir des réponses, les modifier, utiliser des méthodes différentes et puis, si on part de la question, les résultats qu'on trouve, on sait tout de suite s'ils sont bons ou pas, on a tout de suite une idée; ça évite les erreurs de calcul.
- B.D. Comment est-ce que ça peut éviter les erreurs de calcul ?
- Bertrand Bon, ça ne les évite pas, mais si on en fait, d'accord il y a plusieurs réponses, mais la plupart du temps, quand on fait une erreur de calcul, on retombe sur aucune des réponses, donc on se dit qu'on a faux; alors on recommence alors que dans les épreuves classiques on ne recommence pas toujours.
- B.D. C'est intéressant parce que vous connaissez la manière dont les Q.C.M. sont faits pour le concours: il se peut que les cinq résultats qu'on vous propose soient faux...
- Bertrand Oui
- B.D. Vous y pensez à ça ou non ?
- Bertrand Oui, oui...
- B.D. Est-ce que ça s'est déjà produit que vous ayez trouvé une réponse qui ne corresponde à aucune des cinq réponses proposées par l'exercice ? Dans ce cas là, votre première réaction c'est de dire: "j'ai faux" ?
- Bertrand Ca dépend du type de question; si je pense que mon raisonnement est bon, si j'en suis très persuadé, je mettrai, de toute façon ce que j'ai trouvé. Si j'ai fait quelque chose simplement, comme ça, en disant: "peut-être que ça va marcher" à ce moment là, j'hésiterai plus...
- B.D. Ca va dépendre de la confiance que vous avez dans votre propre calcul ?
- Bertrand Oui
- B.D. Bien, mais vous m'avez dit, au début, que vous pensiez que c'était plus facile; est-ce que c'est parce que vous avez de meilleures notes ou est-ce que, pour vous, c'est plus facile de répondre à ce genre de question ?
- Bertrand C'est plus facile: il n'y a pas la règle, la relation à faire, qui peut enlever des points comme dans une épreuve classique; il n'y a que le résultat qui compte et la méthode pour y parvenir n'est pas importante.
- B.D. Alors vous pensez qu'en jugeant simplement le résultat plutôt que la méthode vous êtes plus à l'aise ?
- Bertrand Apparemment !

- B.D. Vous avez trouvé des moyens que vos camarades n'ont pas trouvés pour résoudre ces problèmes là ?
- Bertrand Dans certains cas, il y a des réponses qui, par exemple, s'éliminent automatiquement en les regardant; on voit directement qu'elles sont impossibles et d'autres marchent aussi directement, sans avoir à résoudre le problème on arrive à détecter sur cinq réponses lesquelles sont bonnes...
- B.D. Alors ça, c'est quelque chose que vous utilisez ?
- Bertrand Oui, j'ai utilisé ça plus pour le concours d'entrée en 86 que pour celui de 87. En 87, j'ai beaucoup plus fait les questions en partant des énoncés...
- B.D. C'est-à-dire en essayant de répondre aux questions qui étaient posées ?
- Bertrand Oui, en faisant tous les calculs...
- B.D. Pourquoi avez-vous changé de méthode ?
- Bertrand Parce que je me sentais plus à l'aise
- B.D. Alors si vous essayez de comparer comment vous avez fait en 86 et comment vous avez fait pour l'épreuve de 87, c'est que, en 86, vous aviez plus regardé les réponses, essayé de trouver une information sur la réponse, plus qu'en 87, c'est ça? Est-ce qu'il y a d'autres changements de méthode que vous voyez entre les deux épreuves?
- Bertrand Non, ... je ne vois pas...
- B.D. Par exemple, la façon d'aller d'une question à une autre, est-ce que c'était la même façon?
- Bertrand Oui, mais il y avait des questions, par exemple sur les intégrales, qu'en sortant de terminale je n'avais pas fait et que là j'ai pu faire; c'est dû au programme de première année, on en fait beaucoup plus...
- B.D. Vous aviez plus de connaissances, c'était plus facile
- Bertrand Oui
- B.D. Est-ce que vous arriveriez maintenant à reconstituer comment ça s'est passé lors du concours, pour entrer à l'École? C'est-à-dire, là, vous arrivez, on vous donne un certain nombre de pages, et vous savez que vous avez deux heures pour faire ça; est-ce que vous vous souvenez comment vous avez procédé ?
- Bertrand J'ai regardé les questions dans l'ordre et selon leur difficulté, soit j'ai résolu tout de suite, soit j'ai passé pour ne pas manquer, à la fin, les questions classiques et puis après, revenir sur celles qui posaient des problèmes; en général, de toute façon, j'arrivais à revenir sur toutes les questions.
- B.D. Donc, vous avez lu toutes les questions...
- Bertrand Oui, enfin je lisais dans l'ordre, et quand je trouvais une question facile, je la faisais tout de suite...

- B.D. Quand vous passiez sur un exercice, est-ce que vous faisiez l'exercice d'une manière définitive, c'est-à-dire vous vous disiez: "celui-là, il n'est pas trop difficile, je le fais maintenant", vous alliez jusqu'au bout de l'exercice, et vous n'y reveniez pas après ?
- Bertrand Oui
- B.D. Ou bien vous pouviez, certains exercices étant déjà faits, avoir répondu simplement à certaines questions, vous aviez simplement coché certaines cases ? C'est-à-dire avoir fait un exercice à moitié, est-ce que ça vous est arrivé ?
- Bertrand Peut-être un ou deux, mais il y en avait très peu...
- B.D. Très peu ? c'est-à-dire que soit vous faisiez entièrement l'exercice, soit vous sautiez l'exercice et donc quand, tout à l'heure, vous parliez des réponses impossibles, quand vous voyiez que certaines réponses étaient visiblement fausses, ou qu'il y avait une contradiction quelque part, vous le faisiez pour tout l'exercice, il n'y avait pas simplement une réponse que vous remplissiez et d'autres que vous faisiez après ?
- Bertrand Non, en général, quand il faut répondre à ce genre de question par cette méthode, c'est comme ça pour tout l'exercice.
- B.D. Est-ce que vous utilisiez un moyen pour repérer les exercices difficiles ou faciles ? Comment voit-on qu'un exercice est facile ou qu'un exercice est difficile ?
- Bertrand Sur ce qui se passe dans l'année sur telle ou telle partie du programme, sur les polynômes, par exemple comme l'exercice 2, j'ai presque chaque réponse et puis j'ai développé les réponses jusqu'à savoir si je retrouvais la question; c'est le genre d'exercice pas très difficile...
- B.D. Alors, vous regardez le contenu qui vous semble être le sujet de l'exercice et en fonction de ce que vous savez, de votre connaissance et de vos capacités à résoudre cet exercice vous le faites ou vous ne le faites pas ?
- Bertrand Oui
- B.D. Vous êtes donc passé au travers des trente exercices, la première fois: est-ce que vous vous souvenez en gros, combien vous en avez fait du premier coup ?
- Bertrand Du premier coup, je ne sais pas, peut-être un peu plus de 20...
- B.D. Vous en avez fait 20 directement, c'est-à-dire que vous les lisiez et vous vous disiez "celui-là je peux le faire et je le fais"; les 20 étaient, à un ou deux près, complètement faits?
- Bertrand Oui

- B.D. Je sais que c'est difficile, on ne regarde pas toujours sa montre à ce moment là, mais quand vous êtes arrivé au trentième exercice, vous aviez passé combien de temps, à peu près ?
- Bertrand Il s'est passé une heure et demie...
- B.D. Il vous restait donc, ensuite, seulement trente minutes pour voir les 10 exercices que vous aviez estimés difficiles. Ensuite, quand vous êtes arrivé au bout, vous avez fait 20 exercices, vous voyez qu'il vous reste une demi-heure, est-ce que vous repartez au début et recommencez une deuxième vague, comment faites-vous ?
- Bertrand Après je regarde ceux qui ont l'air les moins difficiles...
- B.D. Oui, mais vous reprenez du début jusqu'à la fin ou vous allez un peu au hasard?
- Bertrand Au hasard
- B.D. Et là vous essayez de les faire aussi complètement ou vous faites des bouts d'exercice ?
- Bertrand J'essaie de réussir le plus complètement, souvent, enfin quelquefois, aussi, je les ai laissés parce qu'ils demandaient un calcul trop important, à ce moment là je me dis, comme j'ai fait pour les autres, qu'il faut essayer la technique...
- B.D. Et si vous essayiez de réfléchir à ce qui vous paraît le plus difficile dans une épreuve comme ça par rapport à une épreuve classique ?
- Bertrand Certainement le nombre d'exercices par rapport au temps; sur une épreuve classique on ne peut pas avoir à faire autant d'exercices en deux heures...
- B.D. Dans le fait qu'il y ait beaucoup d'exercices comme ça, où il faut donc passer d'un sujet à un autre, n'est-ce pas quelque chose que vous trouvez difficile ?
- Bertrand Non, d'autant plus que le nombre d'exercices permet, par rapport à l'épreuve classique, d'avoir une meilleure réussite; dans une épreuve classique, sur les problèmes, il y a ce qu'on réussit et ce qu'on ne réussit pas, mais là même s'il y a un exercice qu'on ne réussit pas ...
- B.D. Oui, mais ça devrait être valable pour tout le monde, je veux dire que tout le monde devrait avoir de très bonne notes; avec 15,5 vous étiez second de la promo sur un sujet de terminale...
- Bertrand Oui mais il faut voir que dans la promo on n'accordait que très peu d'importance à cette épreuve, simplement ça pouvait remplacer une note de colle...
- B.D. Donc l'effort n'était pas récompensé suffisamment, c'est ça ? Mais, mis à part les gens qui n'ont pas voulu jouer le jeu, il y a quand même des gens qui n'ont pas eu de bonnes notes...
- Bertrand Oui

- B.D. Donc ça veut dire qu'il y a quand même des difficultés; mais vous, vous ne ressentez pas la difficulté, par exemple, de passer d'un sujet à l'autre; parce que 20 exercices en une heure et demi, ça fait en gros entre quatre et cinq minutes sur une question, donc sur un thème, puis après vous passez à un autre, à une autre partie du programme, et ça ne vous gêne pas...
- Bertrand Non
- B.D. Ca vous gêne moins que de passer une heure et demie sur un même sujet ?
- Bertrand Oui...quelquefois, quand j'ai plusieurs exercices dans une épreuve classique, je passe un peu d'une idée à l'autre...
- B.D. Vous avez plus l'habitude de jongler d'un thème à l'autre; est-ce que vous êtes quelqu'un qui réagissez très rapidement ? Je veux dire, quand vous avez une information, qu'on vous pose une question, vous répondez très rapidement ?
- Bertrand Ca dépend de quel type de question...
- B.D. Quand vous regardez les exercices, vous essayez de comprendre question par question ou vous lisez d'abord toutes les questions et vous choisissez les questions auxquelles vous avez envie de répondre ?
- Bertrand Je regarde plutôt globalement le type de la question sans entrer dans le détail...
- B.D. Ca vous permet de savoir si vous allez le faire tout de suite...
- Bertrand Oui
- B.D. Ou si vous remettez à plus tard; quand vous avez décidé de faire l'exercice, comment procédez-vous? Est-ce que vous lisez les cinq questions et là encore vous choisissez celle qui vous paraît la plus simple, ou est-ce que vous faites question par question, dans l'ordre?
- Bertrand Question par question...
- B.D. Vous ne cherchez pas d'abord à regarder la plus simple, vous faites dans l'ordre...
- Bertrand Oui
- B.D. Et en essayant toujours de remplir toutes les cases...
- Bertrand Oui
- B.D. Et si vous bloquez sur une question, si vous vous rendez compte que telle question est un peu plus difficile, qu'est-ce que vous faites ? Vous continuez à la creuser ou vous passez à celle d'après?
- Bertrand Je continue un petit peu, et si je ne trouve pas je passe
- B.D. Vous préférez passer un certain temps dessus; est-ce que ça vous pose un problème de devoir choisir, pour chaque question, qu'il faille à chaque fois écrire quelque chose...V,F ? Est-ce que ce serait plus facile s'il y avait des croix à placer ? Ca ne vous pose pas de problème ?

- Bertrand Non
- B.D. Vous vous étiez entraîné avant ?
- Bertrand J'avais vu les annales avant
- B.D. Vous les aviez faites ?
- Bertrand La veille
- B.D. Vous les aviez lues la veille ? Et vous aviez joué le jeu, c'est-à-dire que vous aviez pris les questions, vous aviez essayé d'y répondre; comment avez-vous préparé ça ?
- Bertrand Oui, j'avais joué le jeu...
- B.D. C'est-à-dire que vous aviez rempli le questionnaire en deux heures ?
- Bertrand Oui, à peu près...
- B.D. Et puis après, vous aviez comparé vos réponses avec celles du corrigé ?
- Bertrand Oui, j'ai regardé toutes les réponses dans les annales pour celles que je n'avais pas trouvées...
- B.D. Mais il n'y a pas beaucoup d'explications dans les annales; on donne la bonne réponse mais pas beaucoup plus... Vous arriviez à construire des explications ? A comprendre pourquoi c'était la bonne réponse et pas celle que vous aviez donnée ?
- Bertrand Oui
- B.D. Est-ce que vous aviez tenu compte des remarques qui étaient faites sur la logique ?
- Bertrand Non, je n'avais pas le temps...
- B.D. C'était la première fois que vous faisiez des Q.C.M. ?
- Bertrand Non, j'en avais fait en anglais
- B.D. Quand vous avez fait cet entraînement, la veille du concours, vous aviez eu de bons résultats ?
- Bertrand C'était pas mauvais
- B.D. Donc ça vous a mis en confiance...
- Bertrand Oui
- B.D. Est-ce que votre professeur vous en avait parlé avant ? Il vous avait posé des questions de ce genre-là ?
- Bertrand Il devait nous en poser mais il ne l'avait pas fait
- B.D. C'est donc de vous même que vous avez regardé les annales
-
- B.D. Si vous aviez à donner un conseil à quelqu'un qui va passer un concours comme ça...comment faire pour être second de promo ?
- Bertrand Je ne sais pas...

B.D. Croyez-vous qu'on peut s'entraîner ?

Bertrand Je ne sais pas...C'est une méthode de raisonnement; je ne sais pas si on peut l'acquérir comme ça...

B.D. C'est inné ?

Bertrand Je ne sais pas si c'est inné...si je pense à une certaine idée d'épreuve, on peut arriver à cerner comment on peut répondre aux questions.

V.2

Des Q.C.M. pour une recherche en didactique : "Limites et Infini"

V.2.1 SITUATION DE L'ETUDE

L'enquête* présentée ici avait un caractère préparatoire à une recherche de l'I.N.R.P., commune à DP1 et à DP5, "LIMITES ET INFINI". Cette recherche part des nouvelles directives des programmes de mathématiques des classes de première et des classes terminales scientifiques :

- disparition du formalisme au profit d'une approche de type expérimental,
- incitation à l'utilisation de calculatrices programmables.

Cette double appartenance assure à cette recherche une double approche:

- approche didactique pour connaître les différentes représentations des notions de limites et d'infini chez les élèves,
- approche ingénierie des procédés éducatifs, pour proposer des environnements pédagogiques et des situations d'apprentissage faisant appel aux nouvelles technologies pour le calcul et le graphisme.

L'enquête dont il est question ici avait pour buts:

- l'étude de quelques comportements de réponse d'élèves de terminales scientifiques à des exercices de différentes natures (problèmes liés à des inégalités, problèmes de représentations graphiques, problèmes d'écriture, problèmes d'approximation,...),
- l'étude de paramètres de questionnements en vue d'une éventuelle passation à grande échelle d'une batterie d'exercices sur les notions de limites et d'infini.

* Je remercie très vivement mes collègues:

- Daniel LACOMBE qui m'a conseillé dans la construction de cette batterie d'exercices,
- Jean-François BOUDINOT, chercheur à l'I.N.R.P., qui a effectué la saisie et le traitement informatique des données,
- Mmes LE ROUX, MARQUES, REILLE, STAMON, VINCENT, MM. CABY, ITHIER, LABELLE, qui ont bien voulu faire passer ces exercices à leurs élèves.

V.2.2 CREATION DE LA BANQUE D'EXERCICES MULTIVARIANTS

V.2.2.1 Paramètre commun à toutes les séries

Tous les exercices furent proposés en deux versions (mais pas aux mêmes élèves) : l'une en VRAI/FAUX, l'autre en OUI/NON. Il nous paraissait en effet possible que des élèves soient plus à l'aise, par exemple, à répondre par vrai ou par faux, plutôt que par oui ou par non, à une proposition du type: "Pour tout réel x tel que..., on a...".

Les exercices dont le numéro se terminait par 0 étaient avec VRAI/FAUX, ceux qui se terminaient par 1 étaient avec OUI/NON.

Comme on le verra plus loin, il n'y eut pas de différence significative entre les résultats suivant ces deux modalités; dans la suite nous ne les distinguerons donc pas et parlerons par exemple de l'exercice E 1 pour la réunion des deux versions E 10 et E 11.

V.2.2.2 Présentation des différents exercices.

On trouvera, dans la partie consacrée à l'étude détaillée des résultats, les textes des exercices (sans leurs variantes).

V.2.2.2.1 Série C

Ces exercices avaient pour thème l'image d'intervalles par différentes fonctions classiques; on peut aussi considérer qu'il s'agissait d'exercices sur les inégalités. Cette approche est souvent utilisée pour l'étude des limites.

Nous souhaitions aussi introduire certains "pièges" classiques comme l'intervention de nombres négatifs avec des fonctions paires.

Deux variantes furent systématiquement utilisées pour tous ces exercices:

- une version avec des expressions en "si...alors..."(C.1, C.3 et C.5),
- une version en "pour tout..., on a..." (C.2, C.4 et C.6).

La correspondance entre exercices identiques, à la formulation près, était: C.1/C.2, C.3/C.4, et C.5/C.6. Hélas, une faute de frappe introduisit une différence (un "10" au lieu d'un "100") dans l'une des questions de C.2; ceci créa une très grande différence de comportement de réponse à cet item entre C.1 et C.2; on y reviendra plus loin.

V.2.2.2.2 Exercice D

Cet exercice, que nous jugions difficile, ne fut pas proposé avec différentes variantes (mis à part le V/F-O/N).

Il s'agit d'étudier une fonction rationnelle au voisinage de 0 (cette fonction valant $1/11$ en 0).

V.2.2.2.3 Série E

Cette série porte sur les problèmes d'écriture pour les limites. En fait elle comporte trois sous-ensembles dont les buts sont très différents :

- les exercices E.1, E.2 et E.3 concernent différentes écritures relatives aux limites; les élèves devaient se prononcer sur la validité (la correction) de ces expressions et symbolismes; il s'agissait plus d'étudier ce que les élèves acceptent ou n'acceptent pas au niveau de l'écriture plus qu'au niveau d'une connaissance mathématique sur les limites,

- l'exercice E.5 porte sur les manipulations licites ou illicites sur les variables muettes dans l'écriture habituelle d'une limite,

- les exercices E.6 et E.7 tendent à repérer qu'elles expressions mathématiques les élèves associent à des expressions littérales du type "infiniment grand", "de plus en plus grand",....

V.2.2.2.4 Série G

Les deux exercices de cette série comportent des représentations graphiques de fonctions avec branches infinies et une liste de cinq expressions de type "limite"; les élèves doivent se prononcer sur la correspondance possible entre les fonctions représentées et les propriétés qu'on pourrait leur attribuer. En fait ces deux exercices, G.1 et G.2, ne diffèrent que par la place des graphiques; ceci ayant été fait pour limiter les risques de copiage durant la passation.

V.2.2.2.5 Série I

Ces exercices portent sur les formes dites traditionnellement "indéterminées". Chaque élève avait à traiter deux de ces exercices. Les formes retenues sont:

$$I.1.A: \quad 2 + \infty$$

$$I.1.B: \quad 0 / 0$$

$$I.2.A: \quad +\infty / 0$$

$$I.2.B: \quad +\infty - \infty$$

$$I.3.A: \quad 7 + \infty$$

$$I.3.B: \quad +\infty / +\infty$$

$$I.4.A: \quad 0 / +\infty$$

$$I.4.B: \quad -\infty + \infty$$

Les élèves doivent repérer les formes indéterminées et , le cas échéant, "imaginer" si l'on peut trouver des résultats différents suivant les fonctions considérées (on ne connaît a priori que leurs limites en certains points).

V.2.2.2.6 Série R

Ces exercices (R.3 à R8) font appel à la faculté des élèves de discerner des raisonnements erronés même si, parfois, les résultats sont corrects.

V.2.2.3 Composition des épreuves

Chaque élève avait à traiter en 55 minutes :

- deux exercices de la série C,
- un exercice de la série R,
- l'exercice D,
- deux exercices de la série E,
- un exercice de la série G,
- deux exercices de la série I.

V.2.2.4 Population testée

La population testée provient de terminales C et D ainsi que de la première année de l'E.S.I.E.E. (école d'ingénieurs, niveau première année d'université) et d'étudiants de première année de D.E.U.G. (M.A.S.S. Université Paris 7).

La répartition est la suivante:

Terminales C:	Lycée Bergson (Paris)	40 élèves
	Lycée Chaptal (Paris)	79 élèves
	Lycée Racine (Paris)	21 élèves
	Lycée St-Semin (Toulouse)	29 élèves
Terminales D:	Lycée Bergson (Paris)	24 élèves
	Lycée F. Villon (Paris)	23 élèves
E.S.I.E.E.:		40 étudiants (bac C)
Paris 7:		32 étudiants (bac C : 10, bac D : 16)

soit donc, au total, 216 élèves de terminale et 72 étudiants de première année universitaire.

V.2.3 RESULTATS GLOBAUX

V.2.3.1 Résultats obtenus suivant l'origine des testés

En première approximation on peut considérer que les résultats sont bons puisque, avec un barème grossier consistant à donner le même poids à chaque item, quel que soit le nombre d'items par question, on obtient les moyennes (sur 20) suivantes:

Bergson TC:	16,0	Racine TC2:	15,9
Bergson TD:	13,9	St-Semin:	17,6
Chaptal TC1:	16,8	F. Villon:	14,8
Chaptal TC2:	17,7	E.S.I.E.E.:	17,0 (écart-type: 1,1)
Chaptal TC3:	16,4	Paris 7:	15,2 (écart-type: 2,9)

(moyenne en terminale: 16,2 écart-type en terminale: 2,0)

(moyenne en terminale C: 16,8 écart-type en terminale C: 1,6)

(moyenne en terminale D: 14,4 écart-type en terminale D: 2,0)

Remarque : les épreuves ont été passées par les élèves de terminale et de l'E.S.I.E.E. au printemps 1987 tandis qu'elles le furent par les étudiants de Paris 7 à l'automne 1987.

V.2.3.2 Comparaison V/F-O/N

Comme je l'ai déjà annoncé, cette variante n'influence pas sensiblement le comportement de réponse des candidats. Sur l'ensemble des exercices la corrélation entre les résultats aux deux formes est de 0,91. Si l'on regarde les corrélations exercice par exercice on trouve peu de différence avec cette valeur moyenne. Les élèves ne sont donc pas sensibles aux finesses de langage qui nous avaient conduits à hésiter entre l'une ou l'autre des formulations suivant le texte des questions.

V.2.3.3 Temps de passation

Le temps prévu pour l'épreuve complète était de 55 minutes; l'expérience prouva que 45 minutes furent suffisantes pour beaucoup de candidats.

V.2.4 RESULTATS DETAILLES

Remarque: tous les résultats sont donnés ci-dessous en **pourcentages** afin de rendre plus faciles les comparaisons; néanmoins souvent ces chiffres devront être utilisés avec précaution en raison des petits nombres d'élèves concernés, tout particulièrement en ce qui concerne les résultats des élèves post- baccalauréats.

V.2.4.1 Comparaison des variantes "Si...alors..." et "Pour tout..."

En regroupant les exercices de la série C suivant ces deux variantes, on obtient comme moyenne des pourcentages de réussite :

	"Si...alors..."	"Pour tout..."	corrélation
Terminale	74	78	0,69
Supérieur	79	82	0,93

Ces résultats confirment l'un des résultats des épreuves sur l'implication (cf. chapitre II) à savoir que la quantification implicite intervenant dans la formulation en "si...alors..." est plus difficile que la quantification explicite de la formulation "pour tout...". Néanmoins il est intéressant de noter que cette différence est beaucoup moins nette chez les étudiants du

Supérieur et que pour ceux-ci la corrélation entre les résultats aux différents exercices est très forte.

Pour une enquête à plus grande échelle nous pourrions donc nous contenter de la formulation avec quantification explicite.

V.2.4.2 Exercices C.1 et C.2

Globalement les résultats sont très semblables, avec un avantage pour le Supérieur; cette situation se retrouve de manière générale dans tous les exercices; je ne répèterai donc pas cette remarque à chaque fois; mais je soulignerai simplement les exceptions.

Le piège de l'item n°3 n'a pas attiré beaucoup de candidats, ce qui tendrait à prouver que nos lycéens savent qu'un sinus est rarement supérieur à 1,5 !

En revanche 20% d'entre eux (et 5 étudiants sur 49 dans le Supérieur) estiment qu'au delà de 10^5 , $\sin x$ est strictement inférieur à $\sqrt{2}/2$. On reste aussi surpris des 25% de lycéens (et des 15 étudiants sur 49) choisissant le VRAI (ou le OUI) pour le second item, à savoir que:

" si $0 < x < 10^3$ alors $(1/x) < 10$ ".

Notons qu'ici comme partout ailleurs, la répartition des erreurs n'est pas équilibrée entre les deux populations d'étudiants : les élèves de l'E.S.I.E.E. obtiennent de meilleurs résultats que ceux de l'université, comme on a pu le remarquer plus haut à la lecture des réussites globales; de même on peut noter une différence entre élèves de terminale D et élèves de terminale C.

Une variation très importante est visible à l'item 5 due, sans aucun doute, à l'erreur de frappe qui a été rectifiée sur C.1 mais pas sur C.2, c'est-à-dire " $x^2 < 10$ " au lieu du " $x^2 < 100$ " prévu; le piège reposant sur le fait que x peut être négatif et donc rendre x^2 supérieur à 100. 26 lycéens sur 78 firent cette erreur, 7 sur 12 à l'université et 3 sur 14 à l'E.S.I.E.E..

C 10

Est-il vrai que, pour tout x réel :
(répondez par V (vrai) ou F (faux))

1) si $0 < x < 10^{-5}$ alors $\frac{1}{x} > 10^4$

2) si $0 < x < 10^3$ alors $\frac{1}{x} < 10$

3) si $x > 10^5$ alors $\sin x > \frac{3}{2}$

4) si $x > 10^5$ alors $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Si $x < 10$ alors $x^2 < 100$

6) si $x < -10^6$ alors $x^2 > 10^3$

V/O	F/N
82	17
22	77
3	96
23	76
33	65
68	32

TERMINALE
(n = 78)

V/O	F/N
69	27
38	62
8	92
12	85
38	62
65	35

SUPERIEUR
(n = 26)

C 20

Répondez par V (vrai) ou F (faux)

1) Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-5}$, on a $\frac{1}{x} > 10^4$

2) Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^3$, on a $\frac{1}{x} < 10$

3) Pour tout réel x tel que $x > 10^5$, on a $\sin x > \frac{3}{2}$

4) Pour tout réel x tel que $x > 10^5$, on a $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Pour tout réel x tel que $x < 10$, on a $x^2 < 10$

6) Pour tout réel x tel que $x < -10^6$, on a $x^2 > 10^3$

V/O	F/N
78	21
28	71
1	95
17	76
3	96
72	26

TERMINALE
(n = 72)

V/O	F/N
87	13
22	78
13	87
9	91
9	91
74	26

SUPERIEUR
(n = 23)

fig. V.19: Textes et résultats des exercices C.10 et C.20

C 30

Est-il vrai que, pour tout x réel :
(répondez par V (vrai) ou F (faux))

- 1) si $0 < x < 10^{-5}$ alors $\frac{1}{x} > 10^5$
- 2) si $0 < x < 10^3$ alors $\frac{1}{x} < 10^{-3}$
- 3) si $x > 10^5$ alors $\cos x > \frac{3}{2}$
- 4) si $x > 10^5$ alors $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5) si $x < 10$ alors $x^2 < 10^2$
- 6) si $x < -10^6$ alors $x^2 > 10^{12}$

V/O	F/N
85	14
16	84
9	91
20	79
39	61
85	15

TERMINALE
(n = 68)

V/O	F/N
96	4
8	92
4	96
8	92
42	58
85	15

SUPERIEUR
(n = 26)

C 40

Répondez par V(vrai) ou F(faux) :

- 1) Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-5}$, on a $\frac{1}{x} > 10^5$
- 2) Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^3$, on a $\frac{1}{x} < 10^{-3}$
- 3) Pour tout réel x tel que $x > 10^5$, on a $\cos x > \frac{3}{2}$
- 4) Pour tout réel x tel que $x > 10^5$, on a $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5) Pour tout réel x tel que $x < 10$, on a $x^2 < 10^2$
- 6) Pour tout réel x tel que $x < -10^6$, on a $x^2 > 10^{12}$

V/O	F/N
84	16
18	82
5	95
17	83
26	74
76	24

TERMINALE
(n = 77)

V/O	F/N
85	15
19	81
4	96
12	88
38	62
73	27

SUPERIEUR
(n = 26)

fig. V.20 : Textes et résultats des exercices C.30 et C.40

V.2.4.3 Exercices C.3, C.4, C.5 et C.6.

On retrouve les mêmes pourcentages d'erreur aux items analogues et les remarques que l'on pourrait faire ici sont identiques à celles faites au paragraphe ci dessus; cependant, en l'absence de faute de frappe, on note une différence non négligeable entre les taux d'erreur à l'item 5 suivant la formulation (élèves de terminale) :

	"si...alors..."	"pour tout..."
Exercices C.3/C.4 ($x^2 < 10^2$)	39%	26%
Exercices C.5/C.6 ($x^2 < 10^3$)	57%	35%

Cette différence pourrait, là encore, s'expliquer sans doute par l'interprétation proposée dans ma thèse de 3ème cycle (p. 103):

"il semblerait que ceci ("si un x vérifie A, alors il vérifie B") soit lu comme : "il existe un x vérifiant A et B" ".

C 51

Est-il vrai que, pour tout x réel :
(répondez par O (oui) ou N (non))

1) si $0 < x < 10^{-5}$ alors $\frac{1}{x} > 10^6$

2) si $0 < x < 10^3$ alors $\frac{1}{x} > 10^{-4}$

3) si $x < 10^{-5}$ alors $\sin x < \frac{3}{2}$

4) si $x < 10^{-5}$ alors $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) si $x < 10$ alors $x^2 < 10^3$

6) si $x < -10^6$ alors $x^2 > 10^{15}$

	V/O	F/N	V/O	F/N
<input type="checkbox"/>	21	78	17	83
<input type="checkbox"/>	74	25	70	30
<input type="checkbox"/>	72	18	83	17
<input type="checkbox"/>	9	83	0	100
<input type="checkbox"/>	57	42	57	43
<input type="checkbox"/>	12	86	17	83
	TERMINALE (n = 72)		SUPERIEUR (n = 23)	

fig. V.21: Texte et résultats de l'exercice C.5

C 60

Répondez par V (vrai) ou F (faux) :

- 1) Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-5}$, on a $\frac{1}{x} > 10^6$
- 2) Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^3$, on a $\frac{1}{x} > 10^{-4}$
- 3) Pour tout réel x tel que $x < 10^{-5}$, on a $\sin x < \frac{3}{2}$
- 4) Pour tout réel x tel que $x < 10^{-5}$, on a $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5) Pour tout réel x tel que $x < 10$, on a $x^2 < 10^3$
- 6) Pour tout réel x tel que $x < -10^6$, on a $x^2 > 10^{15}$

	V/O	F/N	V/O	F/N
1)	14	84	15	85
2)	68	31	81	19
3)	59	41	73	27
4)	10	85	0	100
5)	35	63	35	65
6)	21	78	15	85

TERMINALE
(n = 68)

SUPERIEUR
(n = 26)

fig. V.22 : Textes et résultats de l'exercice C.6

V.2.4.4 Exercice D

D 10

On pose, pour tout x réel, $f(x) = \frac{x^3 - 20x^2 - 1}{x^2 + x - 11}$

Répondez par V (vrai) ou F (faux) pour chacune des propositions suivantes :

Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-1}$, on a $f(x) < 10^{-1}$

Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-2}$, on a $f(x) < 10^{-1}$

Pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-2}$, on a $f(x) < 10^{-2}$

Il existe n dans \mathbb{N} tel que, pour tout réel x tel que $0 < x < 10^{-n}$, on a $f(x) < 10^{-2}$

(Si vous répondez V, donnez un tel n :)

	V/O	F/N	V/O	F/N
1)	55	45	64	27
2)	74	26	72	15
3)	32	68	16	71
4)	19	67	20	55

TERMINALE
(n = 201)

SUPERIEUR
(n = 72)

fig. V.23 : Texte et résultats de l'exercice D.1

Une des particularités des résultats obtenus à cet exercice est la grande similitude entre ceux des lycéens et ceux des étudiants, sauf pour la réponse VRAI/OUI à l'item n°4 (respectivement 32% et 16%).

Mais dans l'ensemble, bien que, item par item, les réussites soient à plus de 50%, on n'enregistre que 32% de réussite complète à l'exercice en terminale, 11 élèves sur 43 à l'E.S.I.E.E. et 15 étudiants sur 32 à l'université. L'exercice le plus difficile de cette batterie est donc mieux réussi par les étudiants du D.E.U.G. que par ceux de l'E.S.I.E.E..

On notera aussi avec intérêt que 20 lycéens répondent VRAI/OUI à l'item 3 et FAUX/NON à l'item suivant, alors que, "logiquement", n=2 aurait dû leur suffire ! Parmi les propositions de "n" pouvant convenir on trouve principalement et bien évidemment n=2, à 70%, mais aussi 3, 1, 7, "n ≤ 1" et "n ≥ 2".

Remarque: nous n'avions pas proposé de variante en "si...alors..." pour ne pas compliquer cet exercice; les résultats obtenus ici et pour la série C prouvent que nous eûmes raison.

V.2.4.5 Exercices E.1, E.2 et E.3.

∈ 10

Pour chacune des expressions ci-dessous, inscrivez V (vrai) si l'écriture est correcte et F (faux) si elle est incorrecte ; si vous répondez V, écrivez en toutes lettres la signification de l'expression, si vous répondez F dites pourquoi elle est incorrecte :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} f = 3$ CETTE ECRITURE EST CORRECTE-
 Explications :
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$ CETTE ECRITURE EST CORRECTE
 Explications :
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ CETTE ECRITURE EST CORRECTE
 Explications :
- 4) $\lim_{x \rightarrow -2} f = 7$ CETTE ECRITURE EST CORRECTE
 Explications :

	V/O	F/N	V/O	F/N
	6	94	10	100
	86	14	100	0
	2	98	13	87
	41	59	75	25

TERMINALE (n=48)

SUPERIEUR (n=16)

fig. V.24 : Textes et résultats de l'exercice E.1

E 2o

Pour chacune des expressions ci-dessous, inscrivez V (vrai) si l'écriture est correcte et F (faux) si elle est incorrecte ; si vous répondez V, écrivez en toutes lettres la signification de l'expression, si vous répondez F dites pourquoi elle est incorrecte :

1) $f \rightarrow 3$ quand $x \rightarrow 2$

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

2) $f(x) \rightarrow 4$ quand $x \rightarrow -1$

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

3) $f(x) \rightarrow -5$ en 1

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

4) $f \rightarrow 7$ en - 2

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

V/O		F/N		V/O		F/N	
8	92	0	93				
85	15	100	0				
31	68	7	87				
33	63	47	47				
TERMINALE (n = 46)				SUPERIEUR (n = 15)			

E 3o

Pour chacune des expressions ci-dessous, inscrivez V (vrai) si l'écriture est correcte et F (faux) si elle est incorrecte ; si vous répondez V, écrivez en toutes lettres la signification de l'expression, si vous répondez F dites pourquoi elle est incorrecte :

1) f tend vers 3 quand x tend vers 2

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

2) $f(x)$ tend vers 4 quand x tend vers - 1

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

3) $f(x)$ tend vers - 5 en 1

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

4) f tend vers 7 en - 2

CETTE ECRITURE EST CORRECTE
Explications :

V/O		F/N		V/O		F/N	
3	97	12	88				
90	10	94	6				
22	78	37	63				
38	62	44	56				
TERMINALE (n = 42)				SUPERIEUR (n = 16)			

fig. V.25 : Texte et résultats des exercices E2 et E.3

On observe un certain consensus sur les deux premiers items : rejet du premier (où f apparaît sans x , x apparaissant pour indiquer en quel point la limite est prise) et acceptation massive, mais pas absolue, de l'écriture traditionnelle (avec néanmoins 13% de rejet en terminale). Les avis sont nettement plus partagés pour les deux autres items:

- item 3 (x présent dans $f(x)$ mais pas pour l'indication du point où est prise la limite) : 2% des lycéens seulement l'acceptent dans la version E.1, c'est-à-dire sous la forme symbolique alors que 27% acceptent les formes développées; pour les étudiants, c'est la forme donnée en E.3 (" $f(x)$ tend vers -5 en 1 ") qui remporte le plus de succès avec 6 choix positifs sur 16;

- item 4 (sans x) : cette écriture partage les élèves et les étudiants quasiment à parts égales, puisque 37% des lycéens l'acceptent (55% des étudiants); nous n'attendions pas un tel pourcentage pour une forme peu usitée dans l'enseignement secondaire.

En conclusion on peut estimer que les lycéens et les étudiants ont, dans l'ensemble, une compréhension correcte de l'usage des variables muettes dans les écritures des limites.

V.2.4.6 Exercice E.5

E 50

Est-il vrai que, pour toute fonction f définie sur \mathbb{R} vérifiant $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, on a :

(Répondez par V pour vrai, F pour faux)

		V/O	F/N	V/O	F/N
$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 5$	<input type="checkbox"/>	97	3	96	4
$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -5$	<input type="checkbox"/>	4	96	0	100
$\lim_{u \rightarrow -2} f(-u) = 5$	<input type="checkbox"/>	73	26	81	19
$\lim_{y \rightarrow -2} f(-y) = -5$	<input type="checkbox"/>	8	90	2	98
		TERMINALE (n = 137)		SUPERIEUR (n = 47)	

fig. V.26: Texte et résultats de l'exercice E.5

Les lycéens et les étudiants ont des comportements de réponses très semblables. Ceci conforte le résultat précédent concernant les variables muettes. Néanmoins le taux d'erreur à l'item n°3 (limite de $f(u)$ quand u tend vers -2) est plus important que ce que nous imaginions: 26% en terminale et 19% dans le Supérieur.

V.2.4.7 Exercices E.6 et E.7

E 60

On considère la phrase (P) suivante :

(P) " $f(x)$ devient de plus en plus grand quand x devient de plus en plus petit"

1. Pour chacune des expressions ci-dessous, répondez par V (vrai) ou par F (faux) suivant qu'elle est équivalente ou non à la phrase (P)

		V/O	F/N	V/O	F/N
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$	<input type="checkbox"/>	33	67	14	86
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 10^6$	<input type="checkbox"/>	8	90	0	100
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	<input type="checkbox"/>	65	33	36	64
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 10^6$	<input type="checkbox"/>	13	85	14	79

TERM. n=40 SUP. n=14

2. Si vous avez répondu F dans toutes les cases ci-dessus, répondez par V (vrai) ou F (faux) aux deux propositions ci-dessous :

	V/O	F/N	V/O	F/N
* La phrase (P) n'a aucun sens	<input type="checkbox"/>	8	25	29
* La phrase (P) a un sens mais qui ne correspond à aucune des quatre expressions ci-dessus.	<input type="checkbox"/>	29	29	

Si vous répondez V, indiquez ci-dessous le sens que vous donnez à la phrase (P) :

V/O	F/N	V/O	F/N
20	13	21	89

E 70

On considère la phrase (P) suivante :

(P) " $f(x)$ devient infiniment grand quand x devient infiniment petit"

1. Pour chacune des expressions ci-dessous, répondez par V (vrai) ou par F (faux) suivant qu'elle est équivalente ou non à la phrase (P)

		V/O	F/N	V/O	F/N
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$	<input type="checkbox"/>	31	57	43	57
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 10^6$	<input type="checkbox"/>	2	86	77	93
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	<input type="checkbox"/>	54	41	50	50
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 10^6$	<input type="checkbox"/>	7	88	7	93

TERM. n=41 SUP. n=14

2. Si vous avez répondu F dans toutes les cases ci-dessus, répondez par V (vrai) ou F (faux) aux deux propositions ci-dessous :

	V/O	F/N	V/O	F/N
* La phrase (P) n'a aucun sens	<input type="checkbox"/>	12	7	5
* La phrase (P) a un sens mais qui ne correspond à aucune des quatre expressions ci-dessus	<input type="checkbox"/>	5	7	

Si vous répondez V, indiquez ci-dessous le sens que vous donnez à la phrase (P) :

V/O	F/N	V/O	F/N
7	14	14	7

fig. V.27: Textes et résultats des exercices E.6 et E.7

Les expressions considérées n'emportent aucune adhésion mais en revanche sont refusées à une très forte majorité lorsque 10^6 est proposé comme limite. Plus de la moitié des testés choisit la limite $+\infty$ en $-\infty$ et un tiers se reporte sur la limite $+\infty$ en zéro. Si l' "infiniment grand" semble clair il n'en est donc pas de même de l' "infiniment petit". Très peu d'autres sens ont été attribués à ces deux phrases (citations d'élèves de terminale C :

"qd x est voisin de 0, $f(x)$ croit (en tendant vers une limite finie ou vers l'infini)"

"la fonction $f(x)$ est décroissante strictement"

"cette phrase a un sens dans les réels positifs: on a alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ "

"la phrase n'a 1 sens que si la fonction est strictement monotone \rightarrow on ne peut la traduire par des expressions"

"les valeurs de $f(x)$ sont inversement proportionnelles aux valeurs de x "

Remarque: une erreur de dactylographie a fait disparaître le zéro de la limite dans les deux premiers items de E71 ce qui a perturbé certainement une partie des résultats.

V.2.4.8 Exercices G.1 et G.2

Mises à part de nombreuses remarques concernant l'impossibilité de connaître ce qui se passe en $+\infty$ ou en $-\infty$ à partir des graphes fournis, l'ensemble n'a pas semblé poser de difficulté aux élèves. On peut cependant remarquer que les seules erreurs dépassant les 10% concernent les cas où les limites à gauche et à droite d'un point sont infinies et de signes contraires, sans doute parce qu'alors ces élèves, et ces étudiants d'ailleurs dans la même proportion, ne peuvent pas dire FAUX pour un résultat à moitié vrai. Cette interprétation est confirmée par le grand nombre de commentaires nous suggérant de préciser s'il s'agit de la limite à gauche ou à droite.

Dans la colonne de gauche se trouve, à chaque ligne, un dessin représentant approximativement une fonction f .

Dans chaque case indiquez par O (oui) ou N (non) si cette fonction f vous paraît satisfaire ou non la condition indiquée au-dessus.

		$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
	T	V 96	2	96	1	10
		F 3	97	3	98	89
	S	V 97	1	95	1	11
		F 3	96	5	97	88
	T	V 10	7	2	16	4
		F 81	91	98	74	96
	S	V 13	4	0	13	4
		F 73	95	99	73	95
	T	V 15	4	1	3	91
		F 73	95	95	96	6
	S	V 17	3	0	3	92
		F 69	96	99	96	7
	T	V 95	7	5	13	3
		F 3	92	94	77	96
	S	V 92	3	4	12	0
		F 1	93	92	76	96

fig. V.28: Textes et résultats des exercices G.1 et G.2

V.2.4.9 Exercices de la série I

I 40 Dans chacune des cases 1) 2) 3) 4) et 5) ci-dessous, donnez votre réponse en inscrivant V (VRAI) ou F (FAUX).
 Si vous répondez F dans la case 5) ne remplissez pas la case 6).
 Si vous répondez V dans la case 5) remplissez la case 6) en donnant la valeur de la limite.
 On admettra qu'une limite puisse être finie ou infinie.

A) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

On étudie la limite de $f(x)g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

- 1) $f(x)g(x)$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) =$

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

V/O	F/N
0	100
0	100
10	88
10	90
92	8

V/O	F/N
0	95
5	85
26	63
11	79
58	32

B) On suppose que les fonctions f et g vérifient

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 0$$

On étudie la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque x tend vers 5

- 1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{g(x)} =$

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

V/O	F/N
94	6
3	95
57	43
48	50
0	100

V/O	F/N
68	16
5	74
47	32
26	53
16	63

TERMINALE
(n = 60)

SUPERIEUR
(n = 19)

fig. V.29 : Texte et résultats de l'exercice I.1

I 20

A) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

On étudie la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque x tend vers 2

- 1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} =$

V/O	F/N	V/O	F/N
45	55	50	50
3	97	5	95
32	68	30	70
45	55	55	45
24	75	25	60

B) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 8} g(x) = -\infty$$

On étudie la limite de $f(x) + g(x)$ lorsque x tend vers 8

- 1) $f(x) + g(x)$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 8} (f(x) + g(x)) =$

V/O	F/N	V/O	F/N
91	7	95	0
2	98	0	95
43	57	35	60
57	41	75	20
2	96	0	95

TERMINALE (n = 50) SUPERIEUR (n = 20)

fig. V.30 : Texte et résultats de l'exercice I.2

I30

A) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$$

On étudie la limite de $f(x) + g(x)$ lorsque x tend vers 3.

- 1) $f(x) + g(x)$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) =$

V/O	F/N
0	100
2	98
21	79
21	74
74	24

V/O	F/N
8	89
11	89
0	100
0	94
94	6

B) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = +\infty$$

On étudie la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque x tend vers 4.

- 1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} =$

V/O	F/N
92	8
4	96
51	49
68	32
2	96

V/O	F/N
83	11
0	100
67	33
56	44
6	94

TERMINALE
(n = 49)

SUPERIEUR
(n = 18)

fig. V.31 : Texte et résultats de l'exercice I.3

I 40

A) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 6} g(x) = +\infty$$

On étudie la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque x tend vers 6

- 1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{g(x)} =$

V/O	F/N
26	74
2	98
36	62
20	78
60	36

V/O	F/N
6	94
0	100
11	83
6	89
83	11

B) On suppose que les fonctions f et g vérifient :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$$

On étudie la limite de $f(x) + g(x)$ lorsque x tend vers 1

- 1) $f(x) + g(x)$ est une forme indéterminée
- 2) Quelles que soient les fonctions f et g choisies, la limite n'existe pas
- 3) la limite peut exister ou non suivant les fonctions f et g choisies
- 4) la limite existe toujours mais sa valeur dépend des fonctions f et g
- 5) la limite existe toujours et sa valeur ne dépend pas des fonctions f et g choisies
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) =$

V/O	F/N
94	4
2	94
50	48
54	44
0	96

V/O	F/N
89	6
11	89
61	33
28	67
11	83

TERMINALE
(n = 50)

SUPERIEUR
(n = 18)

fig. V.32 : Texte et résultats de l'exercice I.4

V.2.4.10 Exercices I.1A et I.3A

Ces exercices portent respectivement sur les limites $2 + \infty$ et $7 + \infty$. Le fait que ces exercices n'aient pas été réussis à 100%, même au niveau post-baccalauréat, m'incite à penser que les élèves ont eu du mal à comprendre la signification de chacune des propositions fournies et, en particulier, en quoi elle se différencient les unes des autres. Cette incompréhension pourrait expliquer la très forte proportion d'élèves n'ayant pas remarqué que les propositions 2, 3, 4 et 5 s'excluaient 2 à 2. Contrairement à ce qui se passe parfois avec les exercices posés au concours de l'E.S.I.E.E., on ne peut pas attribuer ce fait à un manque de temps de réflexion puisque presque tous les testés finirent l'épreuve entre 10 à 20 minutes afin la fin prévue. Les "subtilités" rencontrées ici leur seraient donc certainement inaccessibles, ce que l'on peut regretter chez des futurs scientifiques.

V.2.4.11 Exercices I.2B et I.4B

Ces exercices portent sur des formes du type $+\infty - \infty$. Les propositions 3 et 4 recueillent chacune près de 50% d'adhésion, ce qui tendrait à prouver que les élèves n'ont pas à leur disposition d'exemples suffisant pour conclure, même dans une situation simple comme celle-ci. Notons néanmoins que les propositions 1 et 5 sont unanimement rejetées, ce qui permet de penser que les élèves ont quand même su trouver (peut-être avec des fonctions polynômes) de bons contre-exemples.

V.2.4.12 Exercices I.2A et I.4A

Ces exercices portent respectivement sur les formes $+\infty/0$ et $0/+\infty$. Les résultats diffèrent assez nettement d'un exercice à l'autre pour ce qui est de la "forme indéterminée" : pour $+\infty/0$, 45% des élèves (et 50% des étudiants) répondent positivement, contre 26% (et 6%) pour $0/+\infty$. On peut aussi noter les forts taux d'erreur enregistrés pour ces exercices, en particulier :

-> 45% des élèves (55% des étudiants !) pensent que dans le cas $+\infty/0$ la limite existe toujours mais qu'elle dépend du choix des fonctions (ils n'ont sans doute pas à leur disposition d'exemple(s) de fonctions tendant vers zéro de façon non monotone),

-> 36% des élèves (11% des étudiants) pensent que dans le cas $0/+\infty$ la limite peut exister ou non suivant les fonctions choisies; il aurait été intéressant ici de savoir sur quel(s) contre-exemples ils ont fondé leur raisonnement.

V.2.4.13 Exercice I.1B

Cet exercice concerne la forme $0/0$. Là encore, avec une parfaite unanimité sur son caractère "indéterminé" et sur le fait qu'il faille rejeter l'indépendance du choix des fonctions

sur la valeur de la limite, les avis divergent à parts égales entre les propositions 3 et 4. Mais puisque nous ne demandons pas de justification, ou de présentation de contre-exemples, nous ne sommes pas en mesure de dire la proportion d'élèves, parmi les 57% (47% des étudiants), qui savent qu'une forme "0/0" ne conduit pas nécessairement à une limite.

V.2.4.14 Exercice I.3B

Cet exercice concerne la forme " $+\infty/+\infty$ ". On peut être surpris du fort taux d'erreur à cet exercice : 68% des lycéens et 56% des étudiants pensent que la limite existe toujours mais qu'elle dépend du choix des fonctions, alors que pour le cas précédent ("0/0") nous n'avions respectivement que 48% et 26%.

V.2.4.15 Remarques sur la série I

Les résultats obtenus aux différents exercices de cette série mettent en évidence l'impossibilité pour une grande partie (au moins la moitié) des élèves (et même des étudiants) de concevoir des situations faisant intervenir plusieurs types de fonctions afin de construire des exemples et des contre-exemples à des propositions portant sur les limites. Ceci pose le problème, que nous ne prétendons pas résoudre ici, de l'intérêt pour les élèves des classes scientifiques d'être confrontés à des fonctions autres que les fonctions très "classiques", voire à ce que certains collègues appellent des "monstres". Le programme actuel ne s'y prête pas.

Une autre remarque doit cependant être faite sur la difficulté repérée chez de nombreux élèves à comprendre les "subtilités" du questionnement utilisé dans cette série. On peut certainement le regretter chez des futurs scientifiques.

Dans le cas d'une éventuelle autre enquête je pense qu'il serait intéressant de se donner les moyens de connaître les raisons amenant les élèves à tel ou tel choix, par exemple en leur demandant de fournir des exemples ou contre-exemples par lesquels ils pourraient justifier leurs réponses.

V.2.4.16 Exercices série R

R 30

Lorsque x tend vers $+\infty$, un polynôme en x se comporte comme son terme de plus haut degré en particulier :

$x^5 + x^3 + x^2$ se comporte comme x^5

$x^5 + x^4 - 1$ se comporte comme x^5

donc $(x^5 + x^3 + x^2) - (x^5 + x^4 - 1)$ se comporte comme $x^5 - x^5$

c'est-à-dire que cette différence tend vers zéro. Autrement dit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x^3 + x^2) - (x^5 + x^4 - 1) = 0$$

LE RAISONNEMENT CI-DESSUS EST CORRECT
 V pour vrai, F pour faux
 Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous pourquoi :

LE RESULTAT ENCADRE EST EXACT
 V pour vrai, F pour faux
 Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous le résultat qui vous semble exact :

V/O	F/N
19	81
7	93

TERMINALE (n = 47)

V/O	F/N
7	87
7	80

SUPERIEUR (n = 15)

R 40

Lorsque x tend vers $+\infty$, un polynôme en x se comporte comme son terme de plus haut degré en particulier :

$x^4 - 3x^2 + 1$ se comporte comme x^4

$x^4 + 2x^2 - 1$ se comporte comme x^4

donc $(x^4 - 3x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 - 1)$ se comporte comme $x^4 - x^4$

c'est-à-dire que cette différence tend vers zéro.

$x^6 + x^3 + 1$ se comporte comme x^6 , or $\frac{0}{x^6}$ tend vers zéro

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 - 3x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 - 1)}{x^6 + x^3 + 1} = 0$$

LE RAISONNEMENT CI-DESSUS EST CORRECT
 (V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous pourquoi :

LE RESULTAT ENCADRE EST EXACT
 (V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous le résultat qui vous semble exact :

V/O	F/N
4	96
93	4

TERMINALE (n = 45)

V/O	F/N
6	94
100	0

SUPERIEUR (n = 16)

fig. V.33 : Textes et résultats des exercices R.3 et R.4

R 50 Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ et $-\frac{2}{x}$ tendent vers zéro, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} \right) = 0$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{x}} \right) = 0$$

LE RAISONNEMENT CI-DESSUS EST CORRECT
(V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez-ci-dessous pourquoi :

LE RESULTAT ENCADRE EST EXACT
(V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous le résultat qui vous semble exact :

V/O	F/N
26	71
86	7

TERMINALE (n = 27)

V/O	F/N
10	90
90	10

SUPERIEUR (n = 10)

R 60 Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ et $-\frac{2}{x}$ tendent vers zéro, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x)^2 - (x)^2 \right] = 0$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 \right] = 0$$

LE RAISONNEMENT CI-DESSUS EST CORRECT
(V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous pourquoi :

LE RESULTAT ENCADRE EST EXACT
(V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous le résultat qui vous semble exact :

V/O	F/N
15	85
9	81

TERMINALE (n=26)

V/O	F/N
30	70
30	40

SUPERIEUR (n=10)

fig. V.34: Textes et résultats des exercices R.5 et R.6

R 71

Lorsque x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{2}{x}$ tendent vers zéro

donc $\frac{1}{x} (3 + \frac{2}{x}) + x^2$ se comporte comme x^2 . D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} (3 + \frac{2}{x}) + x^2 \right) = -\infty$$

LE RAISONNEMENT CI-DESSUS EST CORRECT
(O pour oui, N pour non)

Si vous avez répondu N, indiquez ci-dessous pourquoi :

LE RESULTAT ENCADRE EST EXACT
(O pour oui, N pour non)

Si vous avez répondu N, indiquez ci-dessous le résultat qui vous semble exact :

V/O	F/N
83	17
6	89

TERMINALE (n = 36)

V/O	F/N
83	17
0	100

SUPERIEUR (n = 12)

R 80

Lorsque x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{2}{x}$ tendent vers zéro

donc $\frac{1}{x} (3 + \frac{2}{x}) + x^2$ se comporte comme x^2 . D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} (3 + \frac{2}{x}) + x^2 \right] = +\infty$$

LE RAISONNEMENT CI-DESSUS EST CORRECT
(V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous pourquoi :

LE RESULTAT ENCADRE EST EXACT
(V pour vrai, F pour faux)

Si vous avez répondu F, indiquez ci-dessous le résultat qui vous semble exact :

V/O	F/N
89	6
100	0

TERMINALE (n = 36)

V/O	F/N
75	25
92	0

SUPERIEUR (n = 12)

fig. V.35: Textes et résultats des exercices R.7 et R.8

La répartition est la suivante :

	raisonnement correct	raisonnement erroné
résultat correct	R. 8	R.4 - R.6
résultat erroné	R. 7	R.3 - R.5

L'exercice R.8 est, bien entendu, le mieux réussi; on notera cependant que 3 étudiants (sur 12) déclarèrent le raisonnement faux et le résultat juste. L'exercice R.7 est sans doute plus surprenant "en toute logique" puisqu'il fournit un résultat faux à la suite d'un raisonnement juste; cette situation n'a cependant pas troublé la majorité des élèves puisque 83% d'entre eux ont réussi cet exercice (et rectifié le résultat). Les exercices R.3 et R.5 ont été réussis à près de 80% (avec néanmoins un résultat étrange) : 3 étudiants (sur 10) ont trouvé que le raisonnement et le résultat de l'exercice R.5 étaient corrects. L'exercice R.4 et l'exercice R.6 ont amené des comportements de réponse fort différents; celui sur la fraction rationnelle a été réussi à plus de 90% tandis que celui sur les radicaux a conduit 26% des élèves dans l'erreur (1 étudiant sur 10).

V.2.5 QUELQUES REMARQUES EN CONCLUSION

A la suite de cette pré-enquête, et en tenant compte du fait que les populations observées ne sont peut-être pas représentatives ni des élèves des terminales scientifiques ni des étudiants du niveau de la première année de l'enseignement supérieur, il semble que :

- beaucoup de ces élèves n'ont pas acquis une bonne maîtrise des images d'intervalles simples par des fonctions "classiques",
- la manipulation de variables muettes dans les écritures des limites ne pose pas de gros problèmes pour la majorité de ces élèves,
- les représentations graphiques de situations simples de limites et la présence d'asymptotes horizontales et verticales ne posent quasiment pas de problèmes à ces élèves,
- ces élèves semblent manquer d'imagination quant à ce qui peut se produire dans le cas de formes dites "indéterminées" et ne pas disposer d'exemples et de contre-exemples suffisamment variés pour ne pas en rester aux situations triviales,
- ces élèves réussissent bien à repérer des raisonnements erronés dans des opérations illicites de simplifications ou d'"équivalents" lorsqu'il s'agit de fonctions polynômes ou rationnelles, moins bien lorsque des radicaux interviennent.

V.3

DES Q.C.M. POUR L'ENSEIGNEMENT à DISTANCE:

Q.C.M. télématiques :

l'existant et le futur*

V.3.1 L'EXISTANT : ETUDE D'EXERCICES DE MATHÉMATIQUES DISPONIBLES VIA MINITEL

Il serait injuste de ne pas commencer ce sous-chapitre sans parler du travail de Gilbert SOL et de sa thèse <SOL87>. Celle-ci est en effet le premier document traitant sérieusement des utilisations existantes ou potentielles de la télématique dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Je renvoie donc le lecteur à cette thèse pour mieux profiter des quelques informations complémentaires que je fournis ci-dessous. Gilbert SOL a présenté avec grands soins les aspects techniques de la télématique, faisant de sa thèse un excellent ouvrage de référence pour une initiation en ce domaine. Certes les premières applications éducatives de la télématique sont encore peu nombreuses et, apparemment, trop souvent fort simplistes mais le développement de services dédiés à la formation invite à y regarder de près. Les contraintes et les avantages de la télématique ne permettent pas de comparer sans précaution les services offerts sur Minitel et des didacticiels existant sur micro-ordinateurs. Mais il n'est pas interdit d'imaginer qu'une bonne analyse critique des produits existants, une meilleure connaissance de ces contraintes spécifiques, et quelques propositions concrètes, pourront être utiles, un jour ou l'autre, aux concepteurs de produits télématiques à finalité éducative.

* Je remercie Gilbert SOL, de l'Université Paris 7, et Patrick GUIHOT, de l'I.N.R.P., pour les remarques judicieuses et les critiques pertinentes qu'ils m'ont faites sur ce texte.

Reprenant la définition qu'en donne Gilbert SOL :

" Par télématique, nous entendrons donc, l'ensemble des techniques et des moyens permettant le transfert d'informations à distance, entre deux ou plusieurs usagers, par voie téléphonique ou par télédiffusion, informations pouvant inclure des messages visuels ou oraux, véhiculées sous forme de données numériques et/ou analogiques, mais supposant un traitement et/ou une organisation par voie d'un logiciel. " (<SOL 87> p.9)

N'ayant nullement l'intention de doubler cette thèse, je souhaite préciser tout de suite mon domaine d'étude, en fonction des préoccupations qui sont les miennes ici, à savoir le questionnement en mathématiques. Je ne m'intéresserai donc pas à tout ce qui concerne la communication via la télématique : messageries, boîtes aux lettres, forum, conférences assistées par ordinateur, et les applications éducatives qui peuvent en être faites comme la diffusion de connaissances, le soutien ou le suivi pédagogique à distance. En revanche je souhaite regarder quels types d'exercices sont offerts via Minitel pour un apprentissage à distance, quelle est leur qualité pédagogique, comment sont formulées les questions, quelles analyses de réponse sont faites, quelles similarités et différences existent actuellement entre ces logiciels éducatifs et l'E.A.O.* que l'on connaît sur micro-ordinateur .

En particulier, je regarderai les contraintes spécifiques de ce média quant aux problèmes du symbolisme et du graphisme, problèmes qui se posent d'ailleurs aux enseignants de mathématiques depuis les débuts de l'informatique à l'école. J'essaierai d'indiquer diverses solutions actuellement utilisées et présenterai, pour terminer, le projet de recherche mené à l'I.N.R.P. avec l'aide de l'E.S.I.E.E. et la collaboration d'enseignants du D.E.S.S. de télématique de l'Université Paris 7.

J'ai préféré ne pas faire une analyse par service ou par logiciel puisqu'ici seules certaines parties, celles relatives aux exercices, m'intéressent.

Dans les reproductions d'écran, que j'ai préféré présenter au lieu de réécrire les textes, le lecteur pourra voir que certains éléments sont involontairement absents (dessins, variations de gris, "enluminures",...) pour des raisons techniques liées à mon imprimante (pour la

* Dans ce texte on trouvera: "E.A.O." pour "Enseignement Assisté par Ordinateur" et "EAO" pour le service accessible en 36-15 par ce code.

compréhension de certains textes j'ai été conduit à ajouter à la main certains signes ou lignes), d'autres le sont volontairement, comme des noms d'auteurs, et ce pour des raisons que le lecteur comprendra fort aisément en lisant mes critiques.

V.3.1.1 Qualité mathématique des produits

La qualité mathématique des produits disponibles sur Minitel est très variée. Ainsi l'exercice (cf. fig.V.36), destiné cependant à des terminale C, et demandant la nature de la suite dont les premiers termes sont 1, 3, 5, 7, 9 (et même avec des points de suspension !), refuse comme "bonne réponse" la réponse "quelconque" et attend que l'élève choisisse "arithmétique".

```
MATHEMATIQUE      Classe de TermC | Note |
                                     | 1 / 4 |
-----
Quelle est la nature de la suite qui
a pour premiers termes : 1; 3; 5; 7;
9 ... ?
-----
1 Arithmétique
2 Géométrie
3 Quelconque
-----
MAUVAISE REPONSE
Il s'agit en effet d'une suite
arithmétique de premier terme 1 et
de raison 2.
Question suivante tapez.....Envoi

MATHEMATIQUE      CLASSE de TermC | Note |
                                     | 0 / 2 |
-----
Quelle est la limite, lorsque x tend
vers plus l'infini, de la fonction :
f(x) = cos(x) sin(x) ?
-----
1 Cette limite n'existe jamais.
2 Plus l'infini.
3 Moins l'infini.
-----
MAUVAISE REPONSE
Lorsque f est une fonction
périodique (sauf si c'est une
fonction constante) il n'y a pas lieu
de parler de limite en l'infini.
Question suivante tapez.....Envoi
```

fig. V.36/37 : Exercices proposés par le service ECOL

Quant aux questions 6 et 10 (fig.V.39/40), (le lecteur remarquera l'emploi du "quelque soit" et celui d'une majuscule pour "Ln", contrairement à l'écriture préconisée par les programmes officiels, "ln", d'ailleurs utilisée à l'exercice précédent), la première repose sur le domaine de définition de la fonction logarithme, tandis que la seconde n'en tient pas compte bien qu'il y ait là un sujet classique d'exercices au baccalauréat : $\ln(ab)$ et $\ln(a/b)$ peuvent être définis sans que $\ln(a)$ et $\ln(b)$ le soient. Roger CUPPENS fait d'ailleurs remarquer que l'expression donnée en 4 n'est certainement pas la définition donnée aux élèves de terminale.

REVISIONS BAC - MATHS A B
QUESTION 6 : 1 POINTS
Soit exp : la fonction exponentielle
notée : $x \rightarrow \exp x$
Quelle proposition est fausse ?
1. $y = \exp x$ est équivalent à $x = \ln y$
2. quelque soit x de \mathbb{R} , $\exp(\ln x) = x$
3. quelque soit x de \mathbb{R} , $\ln(\exp x) = x$
MAUVAISE REPONSE C'était le choix 2
 $\exp(\ln x) = x$ VRAI POUR x POSITIF ET
NON NUL

REVISIONS BAC - MATHS A B
QUESTION 10 : 2 POINTS
Propriétés de Ln :
UNE DE CES PROPOSITIONS EST FAUSSE :
1. $\ln(1/b) = -\ln b$
2. $\ln 1 = 0$
3. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
4. $\ln(a/b) = \ln b - \ln a$
MAUVAISE REPONSE ! C'était le choix 4
 $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ PAR DEFINITION

fig. V.39/40: Exercices 6 et 10 proposés par le service EAO

DEFINITION

Le raisonnement par l'absurde.

Prémisse 1.
SI (proposition A).
ALORS (proposition B).
Prémisse 2.
NON (proposition B).
Conclusion.
NON (proposition A).

— DIDAO ————— → SUITE

1. Si $3 + 4 = M$.
alors $M < 10$.
2. non($M < 10$)
 $3 + 4$ est-il égal à M ?

oui

Relisez les propositions 1 et 2.
La proposition 2 est la négation de la
seconde partie de la proposition 1.
Que savez-vous de la première partie
de la proposition 1? (Utilisez le
raisonnement par l'absurde.)
//// ESSAYEZ ENCORE.

————— DIDAO —————

fig. V.42/43 : Pages proposées par le service DIDAO

V.3.1.2 Qualité pédagogique des produits

V.3.1.2.1 Choix des exercices

Certains services font des efforts d'imagination pour ne pas rester à des exercices très classiques et certains vont même jusqu'à se risquer vers le pseudo-concret ou la mathématisation de situations. Ainsi trouvons-nous:

- la consommation d'une voiture (6 litres 1/3 aux 100km) (service TECOLE),
- le temps de préparation d'un enfant pour arriver à l'heure au cours de math. (cf. fig.V.44),
- des prix de journées d'artisans (cf. fig.V.45).

(Dans la banque d'exercices que l'A.P.M.E.P. met à la disposition de ses adhérents, existe un problème de tableau à faire tourner dans les couloirs d'un musée.)

LES FRACTIONS

REVISION 1

Le cours de maths commence à 8 heures.
 $\frac{1}{4}$ d'heure pour me lever, $\frac{1}{4}$ d'heure
pour déjeuner, $\frac{1}{2}$ heure pour aller au
collège. Olivier pense qu'il peut
dormir jusqu'à 7 h $\frac{1}{4}$. Hélène lui
dit : "Attention, tu vas être en
retard". Qui a raison ?

Vérification → SUITE

fig. V.44 : Exercice proposé par le service ETUD

V.3.1.2.2 Rédaction des textes de question

D'une manière générale on ne constate pas un soin extrême mis à la rédaction des questions, ainsi qu'on a déjà pu le voir précédemment.

Tout d'abord au niveau du vocabulaire on trouve par exemple:

- souvent "quelque soit..." au lieu de "quel que soit...",
- la mention de courbes "réciproques par rapport" à une droite (au lieu de "symétriques par rapport à"), dans un exercice de terminale C portant sur des fonctions réciproques (cf. fig.V.46),

- la notation "Ln" au lieu de "ln" pour le logarithme népérien, parfois même à l'intérieur d'une même page écran (cf. fig. V.47).

Ensuite au niveau de la correction de la présentation, on trouve aussi des mélanges entre lettres minuscules et majuscules pour désigner la même variable (au sein d'une même page-écran) : C et c pour le théorème de ROLLE (service EAO), ALPHA et alpha (service MATHEL).

Ex:A4525

FAUX ! T:12 J:0 F:12

Avec une certaine somme un industriel peut payer 90 journées d'électricien ou 120 journées de peintre ou 360 journées de monteur.

Combien pourrait-il payer de journées d'une équipe comprenant :

1 électricien
1 peintre
1 monteur

?

Non! Il faut évaluer en fraction la part de la somme pour rémunérer 1 jour chacun des 3 techniciens.

?570

Ex:A4527

FAUX ! T:13 J:0 F:13

Avec une certaine somme un industriel peut payer 90 journées d'électricien ou 120 journées de peintre ou 360 journées de monteur.

Combien pourrait-il payer de journées d'une équipe comprenant :

1 électricien
1 peintre
1 monteur

?

Une journée d'électricien fait 1/90 de la somme : Continuez le raisonnement.

?

Ex:A4529

FAUX ! T:14 J:0 F:14

Voici la solution: (soit S la somme)

$$1 \text{ journée électricien} = \frac{1}{90} \text{ de } S$$

$$1 \text{ journée peintre} = \frac{1}{120} \text{ de } S$$

$$1 \text{ journée de monteur} = \frac{1}{360} \text{ de } S$$

$$1 \text{ journée de l'équipe} =$$

$$\frac{1}{90} + \frac{1}{120} + \frac{1}{360} = \frac{8}{360} = \frac{1}{45}$$

La somme permettra de payer l'équipe 45 jours.

fig. V.45 : Exercice proposé par le service TECOLE

REVISIONS DU BAC MATHS C E

QUESTION 3 : 0 POINTS

QUELLE PROPOSITION EST FAUSSE ?

1. Pour tout x et y de l'ensemble des Réels positifs non nuls.
 $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
 $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
2. La fonction $f = \ln x$ définie sur les Réels positifs est strictement croissante.
3. Si x est positif, alors $\ln x$ est positif.

MAUVAISE REPONSE ! C'était le choix 3

\ln est positive pour $x > 1$
nulle pour $x = 1$
negative pour $0 < x < 1$

SUITE

fig. V.47 : Exercice proposé par le service EAO

SOS2424 ayant changé de tarif pour ses exercices, ceux-ci sont offerts en 36-16 (sous le code SOSPROFS), nettement plus chers qu'avant (1,25 F/mn contre 0,98 F/mn), mais sans amélioration apparente de la qualité. Ainsi pour les exercices présentés aux figures V.48 et V.49, le lecteur est prié de deviner, respectivement, ce qu'est "Ln puissance 2" et de comprendre le rôle des parenthèses pour la fonction exponentielle.

CALCUL INTÉGRAL

CALCULER à L'AIDE D'UNE INTÉGRATION PAR PARTIES:

$$J = \int_0^{1/2} (3x^2 - 6x + 1) \ln(1-x) dx$$

ON OBTIENT:

- 1 $J = (19/24) + (9/8) \ln 2$
- 2 $J = (21/24) + (8/9) \ln 2$
- 3 $J = (17/24) + (8/9) \ln 2$
- 4 $J = (17/24) + (9/8) \ln 2$

LA BONNE RÉPONSE EST: N ° 4

fig. V.48 : Exercice proposé par SOSPROFS

DÉRIVABILITÉ

SOIT g LA FONCTION NUMÉRIQUE DÉFINIE
SUR]0,1] PAR:
 $g(t) = (1 - e^{-t}) \ln t$. ON A:

1 $g'(t) = (e^{-t}/t)(t \ln t - e^{-t}) - 1$

2 $g'(t) = (e^{-t}/t)(t \ln t - e^{-t}) + 1$

3 $g'(t) = (e^{-t}/t)(\ln t + e^{-t}) - 1$

4 $g'(t) = (e^{-t}/t)(t \ln t + e^{-t}) - 1$

LA BONNE RÉPONSE EST: N ° 4

fig. V.49 : Exercice proposé par SOSPROFS

V.3.1.2.3 Types de réponse possibles

Une certaine variété règne quant aux types d'exercices suivant les choix de réponses possibles, ainsi trouvons-nous :

- des Q.C.M. simples où l'élève doit indiquer "la" bonne réponse parmi n réponses proposées (services EAO, ECOL, SOSPROFS ou DIDA),

- mais aussi des Q.C.M. simples où l'élève doit découvrir "la" réponse fausse : (exemple: fig.V.47); ceci semble être beaucoup plus utilisé que la forme classique, deux raisons au moins peuvent être à l'origine de ce choix : pour ma part je pencherais à penser qu'après toutes les critiques formulées contre le risque des Q.C.M. de favoriser la mémorisation des erreurs chez les élèves, les concepteurs aient préféré faire rechercher l'intrus afin qu'il soit ainsi "extirpé" de l'ensemble des saines propositions. Daniel Lacombe, en revanche, y voit plutôt le fruit d'un apprentissage de ces mêmes concepteurs ayant pu les conduire à comprendre qu'il est plus facile de repérer "l'unique" bonne réponse quand on connaît tant soit peu le domaine en question,

- des questionnements fermés implicites avec réponses destinées à être comparées à une liste préétablie par le concepteur; c'est parfois le cas chez TECOLE,

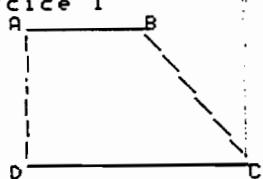
- des questionnements ouverts sans analyse des réponses mais avec une ou plusieurs pages de vérification : c'est la méthode qui a été retenue pour les exercices de ETUD; comme on peut le voir sur la figure V.50, les résultats figurent sur la page même de l'énoncé de l'exercice : dès que l'élève appuie sur la touche "SUITE" il peut voir la solution de l'exercice et, ainsi que semble le souhaiter le concepteur, peut vérifier sa démarche. On peut donc

imaginer que l'élève doit s'obliger à effectuer les calculs jusqu'à ce qu'il obtienne le même résultat que celui donné dans l'énoncé, avant d'aller contrôler son raisonnement, évitant ainsi d'avoir trop vite la solution,

- ce même service, ETUD, recourt aussi aux exercices à trous (fig.V.51) où le concepteur a prévu le bon nombre de points ! Mais il n'y a pas ici de traitement de type E.A.O. usuel où, en déplaçant le curseur, l'élève doit aller "boucher les trous" : ici, ce sont des faux trous. Le programme n'attend rien d'autre que l'activation de la touche "SUITE" et non pas l'entrée de chiffres. Les élèves ne remplacent les points par des chiffres que dans leur tête ou sur leur cahier. En appuyant sur "SUITE", ils verront les points remplacés, mais toute la page sera effacée d'abord puis réécrite.

QUADRILATERES

Exercice 1



On donne le trapèze rectangulaire ABCD

AB = 6 cm
AD = 6 cm
DC = 8 cm

H est le projeté orthogonal de B sur la droite (DC)

- 1/ Calculer l'aire du trapèze ABCD
(réponse : 42 cm²)
- 2/ Calculer AC
(AC = 10 cm)
- 3/ On désigne par I le point d'intersection des droites (AC) et (BH)
Calculer AI (AI = 7.5 cm)

Vérification → SUITE

LES FRACTIONS

Exercice 1

Complète le tableau suivant :

0.2	=	$\frac{2}{10}$	
0.1	=	$\frac{\cdot}{10}$	Somme des 4 nombres = $\frac{\dots}{10}$
3.4	=	$\frac{\cdot\cdot}{10}$	
26.5	=	$\frac{\cdot\cdot\cdot}{10}$	

Vérification → SUITE

fig. V.50/51 : Exercices proposés par le service ETUD

V.3.1.2.4 Commentaires aux réponses incorrectes

Dans l'ensemble, force est de constater que l'on est loin des productions actuelles en matière d'E.A.O.; en disant que "télématique = informatique + télécommunication" on n'imagine pas ce que l'on perd du côté de l'informatique ! On se croirait revenu 20 ans en arrière, au tout début de l'E.A.O. (cf. DECAL™ dans le chapitre sur l'E.(N.I.)A.O.).

Je présente, au chapitre IV sur l'Intelligence Artificielle, quelques idées sur l'intérêt de prendre en compte les erreurs commises par l'apprenant et de le faire le plus rapidement possible après la production de celles-ci. Je n'ai pas souvent vu, dans toute mon investigation, une telle prise en compte. Il y a certes des contraintes dues au support (j'y reviendrai plus loin en détails) et, comme certains "télématiciens" l'avouent, l'efficacité doit primer, mais, ce qui est plus grave, la réflexion pédagogique semble avoir souffert de dramatiques "trous de mémoire" : à part un petit effort chez TECOLE, le reste est d'une pauvreté didactique affligeante.

Commençons par le service ECOL. Tous les exercices sont de la forme Q.C.M., comme il a été mentionné plus haut, avec UNE proposition vraie ou fausse à repérer parmi (toujours) trois possibilités. Le seul travail fait par le logiciel est l'écriture d'un message "BONNE REPONSE" ou "MAUVAISE REPONSE", le clignotement du numéro de la réponse attendue et, le cas échéant, l'incrémentation du compteur des "bonnes" réponses; le commentaire qui s'affiche ensuite ne dépend pas de la réponse fournie; on peut ainsi imaginer la personnalisation du corrigé ! Quant à la valeur pédagogique de ce commentaire général, on reste sidéré; on trouve ainsi :

- des fausses questions (sans intérêt, d'ailleurs, le plus souvent) comme : "ce résultat est à bien savoir. Pourriez-vous le redémontrer facilement?" (service ECOL) ou comme "cette limite est égale au nombre dérivé de $\ln(1+x)$ en zéro. Voyez-vous pourquoi?" qui n'attendent aucune réponse OUI-NON mais un appui sur la touche "ENVOI" pour passer à l'exercice suivant,

- des remarques laissant l'élève sur sa faim comme : "il est facile de trouver un contre-exemple ! Il est utile de savoir que toute fonction dérivable est continue (mais pas l'inverse)" (service ECOL); il aurait surtout été encore plus utile pour certains élèves d'avoir la possibilité de voir un tel contre-exemple.

Les exercices du service EAO sont, dans leur forme, assez voisins des précédents mais ici le nombre des propositions varie entre 2 et 6, même si 3 est souvent rencontré. Là encore le logiciel indique "BONNE REPONSE" ou "MAUVAISE REPONSE" mais, dans ce cas, il précise, en l'écrivant en toutes lettres quel était le bon choix. Le commentaire n'est pas lié à la réponse correcte ou erronée fournie; il faut néanmoins reconnaître qu'il contient

généralement des informations susceptibles d'aider l'étudiant à comprendre, en donnant un contre-exemple ou la proposition corrigée .

Avec TECOLE, nous sommes en présence de questionnements fermés implicites et l'élève doit entrer au clavier sa réponse. L'analyse de réponse prend en compte deux éléments, d'une part l'exactitude de la réponse (ou plus exactement la similitude entre l'expression entrée par l'élève et celle prévue par le concepteur comme étant la "bonne réponse", en tant que suite de caractères) et, d'autre part, ce qui me paraît pédagogiquement intéressant, le nombre d'essais de l'élève. En effet, en cas d'erreur, la solution n'est pas immédiatement donnée à l'élève mais celui-ci reçoit une première information pour l'aider à résoudre le problème, puis en cas de nouvel échec, la solution développée; la figure V.45 illustre un tel déroulement. On notera que pendant les données intermédiaires, faisant suite aux essais infructueux de l'élève, l'énoncé de départ reste affiché à l'écran. Il faut cependant regretter, comme je l'ai mentionné plus haut, que l'on ne trouve pas de prise en compte des erreurs possibles alors que ceci existe depuis longtemps en E.A.O. et que tous les langages et systèmes-auteurs sur micro-ordinateurs offrent cette possibilité aux concepteurs de didacticiels.

Pour MATHHEL, les exercices sont placés après des rappels de cours. Il n'y a pas d'analyse de réponse; l'élève a la possibilité d'aller voir ultérieurement des corrigés regroupés sous une rubrique particulière. Chaque "leçon" ne comporte qu'un très petit nombre d'exercices (moins de 5) mais un effort est fait pour rendre clairs et brefs les corrigés, avec parfois quelques remarques qui, bien que discutables sur le fond, témoignent du souci des auteurs d'apporter des informations à l'apprenant. Ainsi :

$$\text{" COS}^2\text{ALPHA} = (\text{COS ALPHA})^2$$

COS ALPHA est un nombre qui FORME UN TOUT:

CE N'EST PAS COS et plus loin ALPHA."

La mise en page est bien faite.

Pour le service ETUD, comme je l'ai signalé précédemment, il n'y a pas d'analyse de réponse et les résultats sont donnés sur la page-écran même de l'énoncé; l'interactivité est nulle et l'inexistence de commentaires personnalisés en fonction des erreurs commises s'explique aisément. Au moins, il faut reconnaître que ce service a l'honnêteté de ne pas "faire semblant".

Le nouveau SOSPROFS utilise des Q.C.M. élémentaires à 4 propositions. En cas de succès, l'exercice suivant apparaît immédiatement, sans commentaire autre que la modification du score, présent en permanence en haut de l'écran. En cas d'échec, le numéro de la "bonne" réponse s'affiche en bas de page sans commentaire particulier. On peut noter que, propriété rare, on ne revient pas sur la même suite d'exercices si l'on "redémarre" sur ce service.

V.3.1.2.5 Le suivi pédagogique

Mis à part les élèves ayant un abonnement en 36-14 pour DIDAO (DIDA en 36-15, cf.<SOL87>), il n'existe pas de réel suivi pédagogique des élèves ni dans le temps, entre deux sessions, ni même à l'intérieur d'une session : les erreurs n'étant jamais vraiment repérées, le suivi se limite à l'affichage pendant ou en fin de parcours du pourcentage d'exercices "réussis". L'élève se voit alors proposer de recommencer le même test (fig.V.52) s'il a été particulièrement nul ou pour "gagner des points" en perdant "un peu de temps" (fig.V.53). Roger CUPPENS s'étonne que l'auteur associe le fait de faire des exercices à celui de perdre son temps...tout en faisant rentrer de l'argent au serveur. Je crois que l'objet de l'opération s'est simplement déplacé : il ne s'agit plus de faire des exercices (pour éventuellement apprendre des mathématiques) mais de voir une première fois tous les exercices et leur corrigé, puis de refaire le parcours le plus vite possible en fournissant les "bonnes" réponses (bien entendu recopiées lors du premier passage) pour avoir une chance de gagner au concours organisé par le service... On peut sans doute rester consterné devant la pédagogie mise en œuvre ici. SOSPROFS propose, dans son message de fin de test, outre le score, un retour sur du cours et des exercices d'entraînement (cf. fig. V.54).

```
VOUS AVEZ REPONDU A 5 QUESTIONS
SUR LES 20

ALLONS. ALLONS !

FAITES UN PETIT EFFORT QUAND MEME !
OU REPRENEZ VOUS SERIEUSEMENT EN MAIN !
LE NIVEAU BAC. C'EST PAS SI DIFFICILE !

CONCENTREZ-VOUS UN PEU
ET RECOMMENCEZ-MOI CE TEST → ANNUL.
Un autre test RETOUR
POUR SIGNALER LES ERREURS EVENTUELLES!
→ LE COURRIER TELEMATIQUE au SOMMAIRE
```

fig. V.52 : Page proposée par le service EAO



F I N D' E T A P E

Si tu es satisfait de ton parcours,
choisis l'étape suivante

→ SOMMAIRE

Si tu préfères perdre un peu de temps
mais gagner des points, refais l'étape

→ RETOUR

fig. V.53 : Page proposée par le service ETUD

Votre score : 2/10

11.68 F

TEST MATHÉMATIQUES TERMINALE

TU AS ENTRE 0 ET 3 BONNES RÉPONSES

BON D'ACCORD.... CERTAINES QUESTIONS
ÉTAIENT DIFFICILES MAIS UN TEL SCORE
NE SE JUSTIFIE PAS.
UN TRAVAIL SÉRIEUX S'IMPOSE.

TAPE MA2 + ENVOI

ET REVOIE LES CHAPITRES QUI TE POSENT
DES PROBLÈMES.

crac!

AUTRE CHOIX → SOMMAIRE

fig. V.54 : Page finale d'un test sur SOSPROFS

ECOL fournit un renseignement supplémentaire : l'élève reçoit sur son écran un histogramme récapitulatif des scores obtenus par les autres élèves et sa position dans celui-ci.

V.3.1.2.6 Gestion des banques d'exercices

Gilbert SOL notait :

"Les exercices afférents à un sujet se succédant de façon linéaire, ne peuvent être qualifiés de didacticiels mais devraient plutôt être considérés comme des éléments d'une base d'exercices." <SOL87> p.209

Je ne puis qu'approuver. La banque de l'APMEP, accessible par multi-critères, comporte à ce jour plus de 1300 fiches mais destinées à un public d'enseignants et non pas d'élèves. Les autres services ne proposent qu'une petite quantité d'exercices en mathématiques (de quelques uns à quelques dizaines) et, en dehors de MATHHEL, visent presque toutes les disciplines et parfois presque tous les niveaux d'études, du primaire aux différentes terminales. Les exercices sont regroupés par thèmes et niveaux; le parcours est unique, irréversible et indépendant du comportement de l'utilisateur dont la seule issue, en dehors d'aller jusqu'à la fin, est d'appuyer sur "SOMMAIRE" pour obtenir, dans le meilleur des cas, son score partiel et, dans tous les cas, la liberté d'aller voir un autre test.

V.3.1.2.7 Problèmes graphiques

Nous venons de voir la pauvreté des services au niveau des contenus et des analyses de comportement de réponse des apprenants. Nous allons maintenant voir comment les concepteurs résolvent, pour les exercices de mathématiques, les problèmes d'affichage liés au vidéotex et, surtout, à quelle gymnastique visuelle et intellectuelle les utilisateurs doivent se livrer pour comprendre ce qui apparaît sur leur (tout) petit écran.

SOSPROFS propose des pages "GUIDE" précisant une "correspondance des écritures" (fig. V.55). Cette heureuse initiative ne rend pas compte, hélas, de la réalité; ainsi, par exemple, pour les exercices que j'ai pu voir, la racine carrée n'est pas utilisée avec une barre horizontale mais seulement avec un V et la fonction exponentielle n'est pas notée Exp mais e suivi d'une flèche verticale. Dans ce même "GUIDE" on apprend que "0.5" n'est pas une "forme mathématique" contrairement à $1/2$.

G U I D E		
CORRESPONDANCE DES ÉCRITURES:		
RACINE CARRÉE	→	$\sqrt{\quad}$
PUISSANCE	→	\uparrow Exemple: $X\uparrow 2$
LOGARITHME NÉPÉRIEN	→	\ln
LOGARITHME	→	\log Exemple: $\log a$
EXPONENTIELLE	→	\exp Exemple: $\exp X$
VECTEUR	→	$\vec{\quad}$ écris: $\text{vec} \vec{U}$
	→	$\vec{AB}(x;y)$ écris: $\text{vec} \vec{AB}(x;y)$
SINUS	→	\sin Exemple: $\sin A$
COSINUS	→	\cos Exemple: $\cos A$
ENSEMBLE	→	ens
\overline{AB}	→	$m.a(A;B)$

G U I D E		G U I D E	
TANGENTE	→ Tg Exemple: $\text{Tg} A$	POUR LES EXERCICES:	
NOMBRE PI	→ π	METTRE LES NOMBRES SOUS UNE FORME MATHÉMATIQUE:	
DIFFÉRENT DE SUPÉRIEUR A	→ $\langle \rangle$ OU $\#$	EXEMPLE: $1/2$ ET NON 0.5	
SUPÉRIEUR	→ $>$	$1/3$ ET NON 0.33	
OU ÉGAL À...	→ \geq	LORSQU'IL Y A PLUSIEURS RÉPONSES À TAPER, TU DOIS METTRE UNE VIRGULE ENTRE CHAQUE RÉPONSE:	
INFÉRIEUR À	→ $<$	EXEMPLE: TU TROUVES LES RESULTATS SUIVANTS:	
INFÉRIEUR	→ \leq	$X=1 \quad Y=-1 \quad Z=2$	
OU ÉGAL À...	→ \leq	TU TAPERAS → $1,-1,2$	
MULTIPLICATION	→ $*$ Exemple: $X*Y$	BONNE CONSULTATION !	
DIVISION	→ $/$ Exemple: X/Y		
UNION	→ \cup		
INTERSECTION	→ \cap		
VALEUR ABSOLUE	→ $ A $		

fig. V.55 : Pages "GUIDE" offertes par SOSPROFS

V.3.1.2.7.1 Les polices de caractères

Comme c'est, hélas, encore le cas avec certains micro-ordinateurs, le Minitel ne dispose que d'une seule police de caractères. Ici les services sont égaux dans la pauvreté et la monotonie.

V.3.1.2.7.1.1 Les symboles mathématiques

Le problème de la présentation à l'écran de symboles mathématiques se pose depuis le début des utilisations des ordinateurs dans l'enseignement. Les informaticiens l'avaient résolu pour leur propre usage en adoptant des conventions d'écriture, aujourd'hui quasiment universellement acceptées, permettant de "traduire" sous forme d'une suite linéaire de symboles toute expression mathématique même si celle-ci comporte des informations à

différents "étages" dans sa représentation habituelle en imprimerie. Mais dans le cadre d'outils destinés à des apprenants en mathématiques il a été, depuis le début de l'E.A.O., noté qu'un changement dans les notations et habitudes des élèves entre ce qu'ils voyaient au tableau ou sur leurs livres et ce qui leur apparaissait à l'écran, était source de difficultés supplémentaires; l'élève avait alors, outre à résoudre un exercice de mathématiques, un effort de traduction à assumer. On peut concevoir qu'une telle gymnastique soit formatrice, en particulier en mathématiques où les "codages" sont importants; il faudrait étudier sérieusement ce problème et prendre la précaution d'explicitier pour l'apprenant l'objectif de tels exercices. Comme nous l'avons fait remarquer dans <HOCQ83>, il y a en fait deux problèmes qui peuvent être traités séparément et qui peuvent recevoir des solutions distinctes :

1) faire en sorte que ce qui apparaît à l'écran soit le plus proche possible de ce qui est habituel à l'utilisateur ,

2) donner la possibilité à l'utilisateur de répondre sous la forme habituelle.

Avec l'apparition des écrans graphiques, les concepteurs de logiciels pour micro-ordinateurs peuvent, relativement aisément, satisfaire la première exigence; en revanche, la seconde demande de très gros efforts informatiques et pédagogiques car il faut aider l'utilisateur à se repérer, par l'intermédiaire du curseur, sur l'écran. Le recours aux Q.C.M. peut, bien entendu, éviter cette "gymnastique", faire gagner à l'utilisateur un temps non négligeable qu'il pourra réinvestir dans des activités peut-être plus mathématiques. Dans le cas du vidéotex nous sommes revenus aux problèmes d'il y a plus de dix ans puisque nous ne disposons pas d'un véritable graphisme :

"La norme française de vidéotex, de type alphamosaïque, rend quasiment impossible l'adaptation de programmes au contenu essentiellement graphique ". <SOL87> p.121

L'interactivité laissée à l'élève étant quasiment nulle, comme nous venons de le voir, les exemples que je considère ci-dessous relèvent seulement de la préoccupation 1, à savoir la présentation à l'écran d'énoncés mathématiques. On peut néanmoins remarquer que, pour le point 2, une difficulté supplémentaire introduite par le clavier du Minitel: celui-ci ne permet pas le déplacement du curseur autrement que latéralement avec effacement dans le sens "droite --> gauche". Gilbert SOL a traité très précisément le problème qui nous intéresse ici dans le chapitre II de sa thèse et en particulier les aspects techniques y sont très développés; j'y renvoie donc le lecteur désireux d'approfondir la question.

J'ai cherché quelles solutions avaient adoptées les différents services proposant des exercices de mathématiques. Elles sont nombreuses et variées; il n'existe pas, en conséquence, une quelconque unité de représentations, parfois même à l'intérieur d'une même banque d'exercices. Je reviendrai dans ma conclusion sur les conséquences pédagogiques d'une telle situation.

V.3.1.2.7.1.2 Produit

Le symbole le plus communément utilisé reste l'astérisque "*" directement importé de la tradition informatique; mais on trouve aussi le "x", le point et la simple juxtaposition des symboles et/ou des nombres. La répartition est la suivante (cette liste et les suivantes ne sont pas exhaustives) :

* : SOSPROFS, TECOLE

x : EAO, MATHEL, ETUD, TECOLE

. : EAO

juxtaposition: EAO, MATHEL, ECOL, ETUD

V.3.1.2.7.1.3 Division

On trouve principalement /, _ mais aussi ":" ; aucun service (à part l'APMEP) le caractère spécial "1/2". La répartition est :

/ : EAO, MATHEL, ECOL, TECOLE, SOSPROFS

_ : MATHEL, ETUD, TECOLE

":" : TECOLE.

La nécessité de parenthésage dans certains cas ne semble pas toujours être prise en compte par les auteurs, comme en témoigne la figure V.56 ci-dessous extraite pourtant de la banque d'exercices de l'A.P.M.E.P..

```
3/4 P3
Pour montrer l'équivalence, il suffit de
réduire au même dénominateur
[x(x-1)(x+1)] et de mettre tout dans 1
même membre.
7x^2+x+6/x(x-1)(x+1) <=0
soit 7x+6/x+1 >=0
```

Il faut faire 1 tableau de signes.

```
7x+6 >= 0 SSI x >= -6/7
x+1 >= 0 SSI x >= -1
```

```
SUITE Suite de l'énoncé ou solution
* RETOUR Liste
```

fig. V.56 : Page de correction proposée par le service A.P.M.E.P.

SINUS.COSINUS ET TANGENTE D'UN ANGLE
COURS

TABLEAU DE VALEUR des cosinus et des sinus en fonction de l'angle alpha en radians(rd) ou en degrés.

ANGLES EN		COSINUS	SINUS
DEGRES	RADIANS		
0	0	1	0
30	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
90	$\pi/2$	0	1

SUITEPAGE SUIVANTERETOURPAGE PRECEDENTE
GUIDEMOTS CLESSOMMAIRELA TRIGONOMETRIE

fig. V.57 : Page de cours proposée par le service MATHEL

V.3.1.2.7.1.4 Racine carrée

Plusieurs services proposent des écrans comportant un graphisme proche du radical habituel mais d'autres ont encore recours à des écritures. La répartition est :

$\sqrt{\quad}$: MATHEL, ETUD

r. carrée : EAO.

MATHEL utilise aussi un "V" et un trait de surlignement; le résultat n'est pas très satisfaisant (cf. fig. V.57 ci-dessus).

V.3.1.2.7.1.5 Puissance

En dehors de la flèche verticale utilisée par SOSPROFS, les services utilisent :

- des exposants (+ ou -) bien placés : EAO, MATHEL, ETUD

- "puissance", "carré" : EAO, ECOL

- répétition des facteurs : EAO

V.3.1.2.7.1.6 Inférieur ou égal

\leq : MATHEL, SOSPROFS

Il est aussi possible d'obtenir un effet de superposition de < et de = en les plaçant sur deux lignes successives.

V.3.1.2.7.1.7 Infini

+ l'infini : ECOL

plus l'infini : ECOL

l'infini (sans signe) : EAO

+inf. : SOSPROFS

V.3.1.2.7.1.8 Implication

ETUD et EAO utilisent une simple flèche; étrangement, EAO ajoute parfois un "si" au début de la proposition. Ce service utilise aussi cette flèche pour les limites et pour indiquer la touche "SUITE".

V.3.1.2.7.1.9 Logarithmes

Comme je l'ai déjà signalé, EAO passe de Ln à ln, pour désigner le logarithme népérien, d'un exercice à l'autre et même à l'intérieur du même exercice ! (cf. fig.V.47)

V.3.1.2.7.1.10 Exponentielles

Curieusement, je n'ai pas trouvé d'exercice utilisant " e^x "; ECOL choisit "e puissance x" et EAO "expx" et "exp(x)". Comme je l'ai signalé précédemment, SOSPROFS annonce qu'il va utiliser "Exp" mais il utilise, en fait, un "e" suivi d'une flèche verticale (de puissance).

Dans l'un des exercices d'ECOL il est fait mention de la "fonction exponentielle de base E" (au lieu de "base e").

V.3.1.2.7.1.11 Les lettres grecques

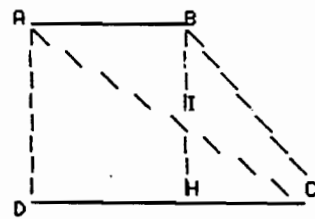
Pour π , SOSPROFS utilise "PI" et MATHHEL le graphisme " π " (cf. fig.V.53 ci-dessus).

V.3.1.2.7.2 Les courbes et les graphiques

Gilbert SOL a bien illustré cet aspect, véritable casse-tête pour les concepteurs d'exercices de géométrie ou d'analyse, dans le second chapitre de sa thèse (<SOL87> pp.126-134). On peut y voir en particulier un exemple de tracé de courbes obtenu avec son logiciel, conçu pour être utilisé comme outil par des élèves.

Dans l'ensemble les graphismes sont très pauvres et peu nombreux. Le cercle trigonométrique proposé par SOS2424 (<SOL87> p.131) laisse rêveurs même les moins exigeants du point de vue de la précision des dessins. Les quadrilatères et autres polygones sont mieux traités, comme on peut le voir sur la figure V.58 ci-dessous.

3/ Calcul de AI



Dans la projection orthogonale sur la droite (DC), les points alignés A, I et C ont pour images D, H et C.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AI}{AC} = \frac{DH}{DC} \rightarrow \frac{AI}{10} = \frac{6}{8} \rightarrow 8 AI = 10 \times 6 \rightarrow AI = \frac{60}{8} \rightarrow AI = 7.5$$

Exercice suivant → SUITE

fig.V.58 : Corrigé proposé par le service ETUD

Ex:A459

FAUX ! T:4 J:0 F:4

* PROBLEMES *

Voyons maintenant quelques problèmes utilisant les opérations sur les fractions.

S'il y a plusieurs résultats à donner, séparez-les par :

Erreur ! 1254 = 6 - (7:17+1:5)*6
Calculez donc d'abord 7:17+1:5

fig. V.59 : Page écran proposée par le service TECOLE

V.3.1.2.7.3 Quelques difficultés ...

V.3.1.2.7.3.1 ...avec les expressions linéaires

Selon les habitudes des informaticiens, certaines expressions apparaissent sur une seule ligne; cela donne parfois des difficultés de lecture, dues en particulier au standard vidéotex (cf. ci-dessus, fig.V.59, l'expression de l'avant dernière ligne). Par ailleurs j'ai déjà donné un exemple d'incorrection due à l'absence de parenthèses (fig.V.56).

V.3.1.2.7.3.2 ...avec le manque d'homogénéité des symboles utilisés

La longue énumération précédente avait pour but premier de rendre le lecteur sensible au manque d'homogénéité des symboles utilisés d'un service à l'autre mais aussi, et ce qui est encore moins justifiable, à l'intérieur même d'un service. Ceci ne peut que gêner les utilisateurs qui doivent à chaque fois s'adapter aux notations voire rectifier d'eux-mêmes les écritures affichées sur l'écran du Minitel. Dans le projet que je présente ci-dessous, nous conservons, pour l'ensemble des exercices, un seul choix de conventions d'écriture et de

symboles, et, dans la mesure du possible en choisissant ce qui se rapproche le plus des notations des imprimeurs.

V.3.2 Le futur: LE PROJET I.N.R.P.-E.S.I.E.E.

Dans le cadre de l'orientation de recherche de la DP5 sur les "Applications éducatives de la télématique" et de la recherche "Q.C.M. Télématiques", nous développons un projet en collaboration avec l'E.S.I.E.E. (au niveau du contenu) et de l'Université de Nice (au niveau du logiciel).

Il s'agit de mettre en place et d'expérimenter auprès d'élèves de terminales C ou E, une banque d'exercices de type Q.C.M. tels que ceux utilisés dans les concours de l'E.S.I.E.E.. L'élève doit donc se prononcer pour chacun des 5 items proposés en écrivant V (pour "VRAI") ou F (pour "FAUX") dans la case correspondante, ou s'abstenir, laissant alors cette case vide. L'utilisateur est prévenu qu'il n'y a pas a priori de limitation dans les choix possibles (du 5 V au 5 F, toutes les combinaisons sont possibles). Nous n'avons pas encore retenu l'idée (trop avant-gardiste ?) de Daniel LACOMBE d'avoir des items pour lesquels la "bonne" réponse serait l'abstention (car le candidat n'aurait pas à sa disposition les éléments pour conclure "logiquement" V ou F).

Cette banque sera remplie tout d'abord par un ensemble d'exercices extraits des concours E.S.I.E.E.. Nous pourrons ensuite la compléter via d'autres sources (telles le C.N.A.M.) ou par des exercices spécialement écrits pour elle. C'est pourquoi le logiciel est prévu pour un nombre de propositions pouvant varier de 3 à 6 dans chaque exercice.

L'avantage principal du recours aux concours déjà passés de l'E.S.I.E.E. est que nous disposons des résultats statistiques sur des populations de plus de mille candidats à chaque fois. Nous connaissons en particulier les réponses ayant été choisies par plus de 5% des testés. Cet élément est pris en compte dans l'analyse de la réponse.

V.3.2.1 L'analyse des réponses et les commentaires

C'est bien entendu là le point-clef de notre banque et la concrétisation de ce dont j'ai déjà parlé à plusieurs reprises sur l'importance du traitement personnalisé de l'erreur. Néanmoins, comme Patrick GUIHOT me l'a fait, fort judicieusement, remarquer, le fait que nous connaissions les types de réponses significatifs (avec les pourcentages d'apparition) ne nous donne pas d'informations certaines sur les raisons qui ont conduit à de telles productions erronées. Nous sommes donc amenés à extrapoler l'origine de l'erreur à partir de notre propre imagination ou connaissance didactique préalable. L'observation d'élèves dans le cadre de notre recherche devra, sans aucun doute, nous permettre d'avancer dans la compréhension de ce problème. Sur une idée de Daniel LACOMBE, nous avons prévu, dans le cas des points jugés difficiles par le concepteur, ou pour des questions d'illogisme dans la réponse, que l'élève ait accès tout d'abord à une première information sur son ou ses erreurs; il pourra

alors, soit reprendre l'exercice au début et modifier sa réponse, soit avoir accès à un second niveau d'explication, et ainsi de suite jusqu'à, en cas d'échec, une solution détaillée; nous n'envisageons pas à présent de dépasser trois niveaux d'explications et ce pour un nombre assez limité d'exercices (cf. fig.V.60, pour la référence au mode entraînement voir plus loin paragraphe sur l'organisation de la banque). L'expérimentation aura à étudier ce phénomène et voir comment les élèves utilisent en fait cette possibilité. L'analyse des réponses permettra tout d'abord de prendre en compte les réponses ayant été données, lors des concours, par plus de 5% des candidats; c'est-à-dire que pour une telle suite de cinq V, F ou blanc prévue, le commentaire sera automatiquement affiché et le compteur (pour l'évaluation finale) sera convenablement incrémenté (cf. les équations de correction pour les concours). L'analyseur s'arrêtera dès que la réponse de l'élève correspondra à l'une de ces réponses anticipées; sinon il sera conduit à passer en revue un certain nombre de réponses ne prenant en compte qu'une partie des items, par exemple le quintuplet " V ? ? F ? " pour la réponse du type: " item A = V, item D = F, quelles que soient les réponses à B, C et E ". Ceci permet de traiter à la fois les réponses item par item et les incohérences logiques (comme avec l'exemple ci-dessus).

Contrairement à tout ce qui existe aujourd'hui sur Minitel, nous pourrons offrir une banque d'exercices dans laquelle l'utilisateur pourra apprendre en fonction des erreurs qu'il aura lui-même réellement produites.

V.3.2.2 Organisation de la banque

L'utilisateur aura deux voies d'entrée:

- la préparation aux concours: le temps sera limité, aucune explication ne sera fournie durant la passation, l'élève pourra se déplacer à sa guise dans la sous-banque relative à un concours, répondre partiellement, entièrement ou reprendre des exercices déjà traités; à la fin, un score lui sera communiqué et il lui sera alors possible d'obtenir, pour chacun des exercices, une analyse commentée de sa réponse finale;

l'entraînement : ici le temps ne sera pas limité, l'accès se fera par choix d'un concours ou par thèmes (suivant le contenu); le déplacement sera libre dans la banque (ou la sous-banque choisie); après avoir répondu à un exercice (complètement ou non) l'utilisateur pourra avoir accès à un commentaire à plusieurs niveaux (voir ci-dessous) suivant l'analyse faite de sa réponse.

BANQUE DE Q.C.M. MATHEMATIQUES
I.N.R.P. / E.S.I.E.E.

MODE
ENTRAINEMENT

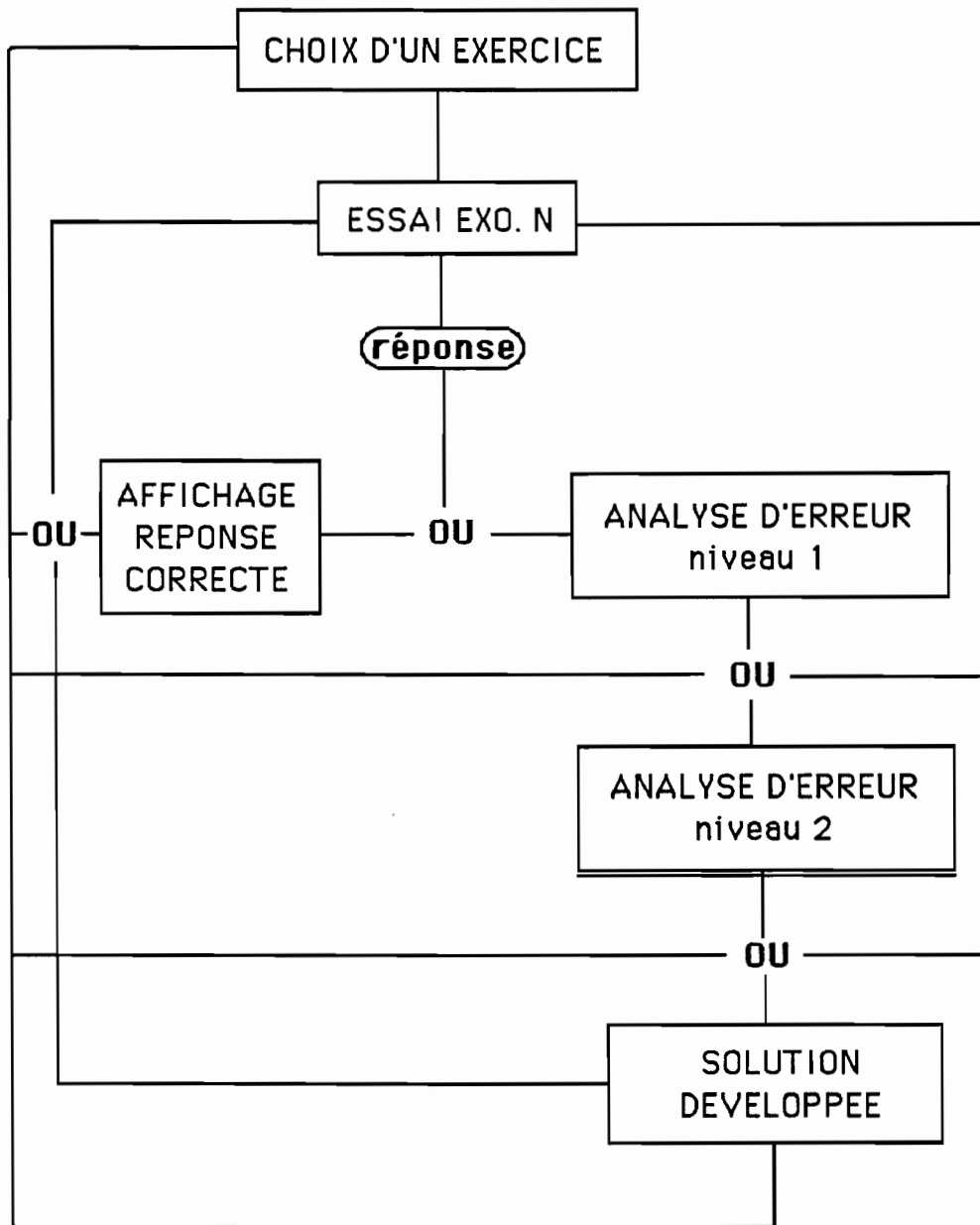


fig.V.60 : Différents cheminements après analyse de la réponse

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS

- o - o -

RESULTATS

POUR RESUMER SANS CONCLURE

OUTILS PEDAGOGIQUES à SUPPORT TECHNOLOGIQUE

ASPECTS PROSPECTIFS : Pistes pour des recherches futures

VI.1 RESULTATS

VI.1.1 Raisonnement / déduction :

L'ensemble de mes travaux sur l'implication (chap. II) et certains sur les Q.C.M. à l'E.S.I.E.E. (chap.V), mettent en évidence des difficultés liées à l'utilisation de syntagmes usuels dans un cadre mathématique; en particulier :

VI.1.1.1 Les représentations des quantifications

L'interdiction actuelle d'utiliser les quantificateurs symboliques dans l'enseignement secondaire n'a pas fait disparaître la nécessité de faire travailler les élèves sur des problèmes de quantifications. Il me semble qu'ainsi la difficulté n'a pas été surmontée mais simplement cachée; or je pense préférable de toujours définir avec précision les conventions du langage employé.

J'ai tenté de mettre en évidence, en particulier, les variations de compréhension que peuvent engendrer différents moyens de quantifier des expressions; par exemple les quantifications explicites du type "pour tout x de A tel que $P(x)$, on a $Q(x)$ " ou bien "chaque fois que l'on a $P(x)$, on a aussi $Q(x)$ " sont mieux maîtrisées que celles introduites par "si..., (alors)...".

Les quantifications "fictives", c'est-à-dire faisant intervenir des êtres fictifs, ne sont pas clairement perçues par de nombreux apprenants qui arrivent difficilement à comprendre qu'il ne s'agit pas d'un "Jacques" particulier mais de tout individu (quel que soit d'ailleurs son prénom) qui répondrait aux caractéristiques indiquées pour Jacques. Dans de telles situations, et dans toutes celles où le référentiel n'est pas explicitement donné au questionné, la difficulté majeure consiste à comprendre quel est cet ensemble. Par exemple, les commentaires recueillis lors de la passation des tests sur "Jojo le cambrioleur" montrent une très grande variété d'interprétations autour de "tous les exemplaires de ce 'Jojo', pour toutes les occasions où il cambriole, pour toutes les maisons possibles et pendant toutes les nuits possibles". Pour les testés, cet univers des possibles à paramètres variables perd toute réalité...en revanche ils acceptent volontiers la possibilité de l'exception qui n'infirme pas la règle : toutes les nuits Jojo fait X, sauf cette nuit particulière où il voulait déjouer la police.

Les testés font donc un usage très "naturel" des quantifications s'appuyant sur le bon sens et la réalité de la langue.

VI.1.1.2 Implication / équivalence

Beaucoup de travaux de psychologues et de didacticiens portent sur ces deux concepts et ont conduit à la diffusion et à l'utilisation de tests supposés pouvoir "mesurer" la logique d'individus : en effet, la capacité à ne pas confondre ces deux concepts serait une caractéristique du stade de développement intellectuel le plus élevé.

Stades de développement (PIAGET)

Les réussites à des tests du type "Jojo le cambrioleur", supposés aider à la détermination des stades de développement intellectuel, peuvent passer de 10 à 30% uniquement en fonction du "contexte" utilisé. Si ces stades existaient de nombreux individus en changeraient et appartiendraient à l'un ou à l'autre suivant le test passé. C'est d'ailleurs là le problème que certains psychologues appellent la "dysharmonie cognitive".

Aptitude aux mathématiques

De bons élèves, et même certains en mathématiques, échouent à des tests de ce type et "tombent" dans le piège dit de la confusion "implication / équivalence". (Josette ADDA a même trouvé que certains auteurs, mathématiciens, arrivent, en raison du principe du maximum d'information, à faire eux-mêmes cette erreur en construisant des questions destinées à la repérer chez les testés! cf. chapitre II et <ADD76b>). Ces tests n'ont donc aucune valeur prédictive quant aux chances de réussite dans des études de mathématiques.

Tests de l'armée / niveau scolaire

La réussite aux tests du type "Jojo le cambrioleur" est mieux corrélée avec les tests psychométriques de l'armée qu'avec la réussite scolaire. Ces tests seraient donc plutôt prédictifs quant aux chances de réussir à d'autres tests.

Point de vue des linguistes

Nos résultats confirment la position des linguistes qui voient rarement l'implication dans les différents emplois répertoriés du "si...(alors)..." et celle de Daniel LACOMBE qui conclut au même résultat pour le langage mathématique.

VI.1.1.3 "habillages" / "décors"

Par définition les mathématiques sont abstraites; néanmoins, l'enseignement des mathématiques a pour objectifs, entre autres, d'aider les apprenants, d'une part à travailler dans l'abstrait et à savoir abstraire, et, d'autre part, à appliquer ces connaissances dans des situations réelles. Certains pédagogues avancent aussi l'idée que les apprenants ont moins de difficulté à "faire des mathématiques concrètes".

Après avoir constaté, dans mon travail sur l'implication, que le "concret" considéré, dans les tests dits "de logique", est purement fictif, j'ai pu vérifier l'existence de nombreuses difficultés chez les apprenants à manipuler de telles fictions.

Il est intéressant de rapprocher cette recherche des travaux conduits par Josette ADDA sur ce qu'elle appelle "habillages". Dans les deux cas il s'agit d'épreuves revêtant une certaine "forme" mathématique et portant sur des contenus extra-mathématiques. Dans un exercice du type "Maman achète 35 crayons à 7 francs..." il s'agit d'une application de la multiplication à un problème "concret" d'achat d'objets; dans "Jojo le cambrioleur" il s'agit d'une application de l'implication à une histoire policière. Ensuite les deux situations se séparent.

Dans "Maman achète", la notion mathématique sous-jacente (la multiplication) et les algorithmes associés ont déjà été présentés et enseignés aux enfants. Ceux-ci ont une double tâche : d'une part de reconnaître qu'il s'agit d'un problème de multiplication, d'autre part d'effectuer le calcul en appliquant les bons algorithmes.

Dans "Jojo le cambrioleur", la notion mathématique, à part quelques rares exceptions, n'a jamais été présentée ni enseignée aux testés, et encore moins avec de tels exercices; par exemple, sans doute aucun de ces testés n'a appris que l'implication n'est pas commutative. Il ne s'agit donc pas pour eux de "retrouver" cette notion dans ce test. La situation est encore aggravée par l'inadéquation entre ce qui est visé par le testeur, en l'occurrence l'implication, et la réalité. Les réponses fournies tiennent compte du "décor", c'est-à-dire de la réalité décrite dans le texte. Les testés font preuve de logique et sont capables de construire des raisonnements parfois subtils. Beaucoup essaient même d'imaginer ce sur quoi "on" les teste et de modifier en conséquence leur conclusions.

Il semble que, dans le domaine des exercices scolaires, les "habillages" ne produisent pas cet effet et que les élèves n'aillent pas s'appuyer sur la réalité des objets mis en jeu pour mener leurs calculs ou leurs raisonnements, en utilisant par exemple des arguments du type "réduction par lots ou pour grandes quantités". En revanche Josette ADDA note des effets négatifs, parfois traumatisants, liés à ces "habillages", qu'ils soient d'ordre affectif (comme parler de la Maman à un orphelin) ou de l'ordre du risque d'abrutissement (dressage de singes savants) au moment où l'enfant accepte de répondre ce que son maître attend.

Ces deux types d'exercices se différencient aussi par la présence de difficultés linguistiques plus importantes dans ceux de logique comme, en particulier, l'utilisation du "si..." ou du "si...alors...", même si les deux font intervenir des quantifications implicites ("Maman", "Jojo").

On peut cependant remarquer que certains tests de type "piagétien" ne présentent pas les mêmes écueils. Certains ne présentent pas de difficultés linguistiques spécifiques, comme par exemple le test de l'E.P.L. demandant au testé de "deviner" quel sera le dessin obtenu sur une feuille de papier située sur un cylindre en mouvement en fonction de divers déplacements du crayon (cf. <LON76>). D'autres s'appuient sur la manipulation réelle d'objets, mais, peuvent

alors, comme pour le test des cartes de WASON, présenter des problèmes logico-linguistiques plus compliqués que ceux liés simplement à l'implication.

VI.1.1.4 Vrai / faux

La véracité des mathématiciens n'a souvent que peu de liens avec celle acceptée par les élèves en cours de mathématiques : depuis le "c'est vrai parce que c'est encadré" jusqu'au "c'est vrai puisque le prof l'a dit", le problème sous-jacent est celui de la preuve, de la conviction et, plus profondément, le problème du sens.

Il peut ne pas être choquant, comme nous l'avons vu avec les fractions, pour un élève de trouver $A = B$, $B = C$ et $A \neq C$, ou bien $5 \times (3/4) = 3/4$; dès lors que, pour cet élève, les objets manipulés n'ont pas de sens, le VRAI ou le FAUX qu'il pourrait leur attribuer n'a pas de sens non plus.

VI.1.1.5 Maximum d'information

A différentes occasions au cours de mes recherches j'ai pu vérifier expérimentalement ce que Oswald DUCROT a trouvé comme étant l'une des lois du discours "ordinaire" - la loi d'exhaustivité- et dont Daniel LACOMBE, sous l'appellation "principe du maximum d'information", a mis en évidence l'importance dans le discours mathématique scolaire. Ce principe conduit des quantités non négligeables (jusqu'à près de 60% d'élèves de terminales C) d'apprenants à déclarer fausse une propriété du type "pour tout x de A , $P(x)$ " lorsqu'ils savent qu'il est vrai que "B contient strictement A et pour tout x de B, $P(x)$ " (voir par exemple, au chapitre V, l'exercice de l'E.S.I.E.E. sur la continuité).

Ce type de comportement est à rapprocher d'autres liés eux aussi à des facteurs mathématico-linguistiques comme l'usage du "sur", déformé par l'emploi qui en est fait dans l'enseignement secondaire avec "le" domaine de définition au sens de "l'ensemble maximal sur lequel une fonction est définie", qui induit une nécessité de maximalité inhabituelle chez les mathématiciens; ainsi "f est continue sur E" signifie "f est continue sur E et seulement sur E" pour les lycéens, et "f est continue sur au moins E" pour les mathématiciens.

VI.1.1.6 Absence de variables dans "si...(alors)..."

J'ai pu aussi constater le refus des testés de répondre à des questions faisant intervenir des phrases en "si..., (alors)..." ne contenant aucune variable et dont la valeur de vérité est connue. En effet dans le langage usuel le "si" requière une quantification et donc la présence d'au moins une variable quantifiable.

Daniel LACOMBE a eu l'occasion de vérifier que les mathématiciens avaient un comportement identique; ainsi a-t-il remarqué qu'aucun de ses collègues n'acceptait de se prononcer sur la véracité d'une proposition du type :

"(7 est pair) \Rightarrow (16 est premier)", ni même de celles obtenues en remplaçant "pair" par "impair" et/ou "16" par "17", en invoquant le fait que les valeurs de vérité de chaque membre étaient connues.

VI.1.2 Formulation des questions dans des Q.C.M.

VI.1.2.1 Intérêt / pertinence de certains Q.C.M.

Je pense avoir montré qu'il est possible de créer des Q.C.M. qui, lorsqu'ils répondent à certains critères, peuvent présenter un intérêt à la fois pour l'enseignant et pour le questionné.

Rappelant les propriétés présentées au chapitre I, les critères principaux pourraient être :

- > ne pas se limiter à la forme "trouver la bonne réponse" parmi n réponses,
- > ne proposer que des réponses correspondant à des erreurs profondes et pertinentes,
- > rédiger les questions de telle sorte qu'elles soient incitatives aux erreurs du type indiqué précédemment et qu'elles n'induisent ni des erreurs non pertinentes ni des erreurs de surface.

VI.1.2.2 La personnalisation du choix de réponse : "JE" vs "ON"

Comme je l'ai évoqué au chapitre I, la formulation pour la véracité large, associée à des VRAI/FAUX ou des OUI/NON, joue un rôle intéressant, en particulier, pour les aspects "logico-linguistiques" qui y sont liés. Ainsi, par exemple dans le cas des tests du type "Jojo, le cambrioleur", le testé est amené à se prononcer sur la véracité de phrases contenant des variables implicitement quantifiées, avec des choix "VRAI/FAUX" ou "OUI/NON" et, en plus, un 3ème choix : "ON NE PEUT PAS SAVOIR", "JE NE PEUX PAS SAVOIR" ou "JE NE SAIS PAS".

Le verbe "pouvoir" dans le "ON NE PEUT PAS SAVOIR" porte sur cette quantification. Accepter la phrase proposée comme "VRAIE" revient à déclarer que, dans tous les cas, cette proposition est vraie; la refuser c'est dire que, dans tous les cas, elle est fausse. Nous sommes donc devant une interprétation pouvant se réduire à "Pour tout x, P(x)" ou "Pour tout x, $\neg P(x)$ ". Le choix "ON NE PEUT PAS SAVOIR" ne représente donc pas un aveu d'ignorance mais au contraire l'affirmation de l'existence de contre-exemples, d'exemplaires de "Jojo" pour lesquels la propriété est vraie et d'autres pour lesquels elle est fausse. Ce choix correspond, par la même occasion, à l'affirmation: "PERSONNE NE PEUT SAVOIR" et donc devrait aussi correspondre à celle de "JE NE PEUX PAS SAVOIR". Bien qu'une telle déclaration ne soit en rien péjorative pour celui qui la produit, on note cependant que la personnalisation du "je" dans le "JE NE PEUX PAS SAVOIR" diminue l'aspect général du

choix, comme indiqué ci-dessus, et conduit à des comportements plutôt voisins du "JE NE SAIS PAS" qui, en revanche, est fortement ambigu et peut signifier une incapacité toute personnelle du candidat à répondre. Nous avons en effet constaté un très net refus du choix "JE NE SAIS PAS", sans doute en raison de sa connotation négative pour l'individu testé qui peut ainsi laisser sous-entendre que lui ne sait pas mais que d'autres savent.

Il a été ainsi prouvé que le comportement de réponse à un questionnaire faisant intervenir, en plus des choix "VRAI/FAUX" ou "OUI/NON", un troisième choix du type "ON NE PEUT PAS SAVOIR", "JE NE PEUX PAS SAVOIR" ou "JE NE SAIS PAS" pouvait être très fortement modifié suivant la formulation utilisée.

Il est ainsi possible de rendre un test plus difficile ou plus facile, sans changer ni le contenu ni la forme de la question. Mais on ne peut pas dire que tous les tests ont de meilleurs résultats avec "ON NE PEUT PAS SAVOIR" plutôt qu'avec "JE NE SAIS PAS", cela dépend essentiellement de la question elle-même.

Ainsi, dans le cas où la "bonne réponse" correspond à l'existence de cas où la proposition est vraie et d'autres cas où elle est fausse, le test sera mieux réussi avec "ON NE PEUT PAS SAVOIR" qu'avec "JE NE PEUX PAS SAVOIR" ou qu'avec "JE NE SAIS PAS", ces deux dernières formulations conduisant alors de nombreux candidats à répondre plutôt "NON" (ou "FAUX") à la question posée. Inversement, si la réponse "correcte" attendue est du type "NON" (ou "FAUX"), le test sera mieux réussi en proposant une troisième réponse possible sous la forme "JE NE SAIS PAS" que sous la forme "ON NE PEUT PAS SAVOIR".

VI.1.3 Résultats (didactiques) plus ponctuels

Lors de mes recherches un certain nombre de résultats ponctuels sur certaines difficultés ou erreurs ont été obtenus dans divers domaines de l'enseignement des mathématiques (fractions, limites, et autres points des programmes des terminales scientifiques). Le lecteur peut en trouver des illustrations dans les chapitres II à V. (Pour plus de détails publications sur ces enquêtes ou concours)

VI.2 OUTILS PEDAGOGIQUES A SUPPORT TECHNOLOGIQUE

A l'occasion de mes recherches plusieurs supports technologiques ont été utilisés, soit pour la passation de certains questionnaires, soit pour l'analyse d'autres qui furent passés "papier-crayon".

Le développement de technologies liées à l'informatique influence considérablement celui des sciences. Leur rôle concerne, directement ou indirectement, les contenus et les méthodes d'enseignement des disciplines, les mathématiques en particulier. Je ne développerai pas ici cette discussion qui serait sans doute hors sujet.

Pour ce qui relève du questionnement et des erreurs, j'ai suivi plusieurs directions :

VI.2.1 des cours programmés

Avec mes travaux sur MITSU™ ou sur PLATO™, je participais à une orientation d'un type d'E.A.O. qui a représenté, pendant de nombreuses années, l'idée (voire l'espoir) que l'ordinateur pouvait assumer des tâches d'enseignement magistral; mais depuis une dizaine d'années cette idée a été plus ou moins abandonnée, au moins pour la formation initiale. A l'heure actuelle, et d'après le dernier rapport du Congrès américain sur "les nouveaux outils pour l'enseignement et l'apprentissage" (<OTA88>), les tutoriels ne représenteraient que 33% de l'ensemble des logiciels éducatifs aux Etats-Unis tandis que les logiciels de type "drill-and-practice" en représenteraient presque le double.

VI.2.2 des Q.C.M. à support informatisé

Dans ce cadre j'ai commencé à travailler avec des outils de type langage de programmation, que ce soit avec un langage-auteur comme DECAL™, pour mon test d'analyse à l'E.S.I.E.E., ou simplement avec BASIC, pour la première version de FRACT sur MICRAL™. Présentement le support est télématique et requiert des outils de développement très particuliers mais, dans leur essence, très proches des systèmes-auteurs.

VI.2.3 des outils issus de l'Intelligence Artificielle

Après des essais limités avec PROLOG, je travaille désormais avec une "coquille" de système-expert. Les facilités de l'environnement, très fortement inspirées de la philosophie MacIntosh™, permettent de se concentrer sur le problème de la représentation des connaissances, en l'occurrence sur les règles de production d'erreurs, sur la hiérarchie de leur réseau, plus que sur la résolution de problèmes de programmation. Je pense que c'est ce genre d'outils qu'il faudrait fournir aux futurs enseignants pour qu'ils se préparent à concevoir les logiciels éducatifs qu'eux-mêmes ou leurs élèves utiliseront dans 4 ou 5 ans.

Plus généralement, il est raisonnable de penser que les recherches qui se situent à la confluence de l'éducation et de l'Intelligence Artificielle peuvent ouvrir des perspectives intéressantes à la fois pour l'enseignement traditionnel (banques d'informations intelligemment gérées, aides pour la formation des enseignants,...) et pour l'enseignement à distance (tutoriels "intelligents", systèmes-experts avec compétences pédagogiques,...), à condition que les besoins réels en matière de formation soient explicités par les acteurs concernés et entendus par les développeurs et les chercheurs en Intelligence Artificielle. Les Journées Nationales qu'organisera l'I.N.R.P. au printemps prochain sur ce thème apporteront, nous l'espérons, des éclaircissements et des voies de travail prometteuses.

VI.3 POUR RESUMER SANS CONCLURE

Dans le vaste champ de la didactique des mathématiques il y a de nombreux domaines auxquels cette thèse n'apporte pas de contribution. Pour en citer quelques uns : l'observation des élèves en classe, l'étude clinique de comportements scolaires, la définition des programmes scolaires. En dehors d'activités assistées par ordinateur je ne propose pas non plus de séquences didactiques pour présenter telle ou telle notion mathématique.

En fait, ma thèse voudrait apporter des éléments en vue de dresser un bilan de certaines connaissances. Mais, à partir de ce triste "état des lieux", je propose des outils pour un diagnostic sérieux et efficace. J'invite le lecteur, et avec lui tous mes collègues professeurs de mathématiques, à regarder de plus près les erreurs des élèves. En mettant en évidence un certain nombre de paramètres extra-mathématiques pouvant influencer le comportement de réponse, je vise à séparer les erreurs dues à une mauvaise construction des tests, des erreurs dues à des incompréhensions en mathématiques. Je pense qu'une réflexion sur la profondeur des erreurs, distinguant celles qui reflètent une totale incompréhension du domaine étudié de celles qui traduisent une pauvreté dans les représentations des concepts mis en jeu, et de celles qui ne sont dues qu'à l'inattention, peut être très profitable pour les enseignants et qu'elle devrait faire partie aussi bien de leur formation initiale que continue.

Que l'on ait ou non recours à l'informatique pour aider des apprenants à corriger leurs erreurs, je pense qu'il est utile de repérer les raisonnements erronés produits, voire les règles incorrectes qu'ils emploient. Mais je crois aussi très important de ne pas limiter la remédiation au simple énoncé de telles procédures repérées ni à la présentation des règles correctes. Après avoir abandonné la voie de l'E.A.O. usuel je me dirige vers un tutorat assisté par ordinateur que j'imagine volontiers "intelligent". J'essaie présentement de réfléchir à cette expertise pédagogique encore trop restreinte pour la développer avant de pouvoir envisager son implantation dans une machine.

Enfin, il me semble que cette perspective est sans doute très voisine de ce que Jean CARDINET préconise sous l'expression "approche psycho-sociale" (cf. <CAR86>) puisque je tente d'introduire dans cette expertise pédagogique des éléments non directement reliés aux mathématiques comme l'adaptation des enfants aux règles du langage scolaire ou à des raisonnements guidés par les attentes et désirs supposés du questionneur. Changer le statut de l'erreur dans l'apprentissage devrait sans aucun doute avoir des effets bénéfiques sur la relation maître-élève et sur les produits pédagogiques, en particulier informatiques.

C'est du moins l'un de mes buts.

VI.4 ASPECTS PROSPECTIFS : PISTES POUR DE FUTURES RECHERCHES

VI.4.1 Etude du comportement des enseignants des collèges et des lycées devant une production d'erreurs en classe

Afin de mieux envisager les possibilités de la mise en place d'une "pédagogie de l'erreur" aussi bien dans l'enseignement primaire que secondaire, il s'agirait d'étudier la situation actuelle :

- Quels sont les divers comportements des enseignants devant une production erronée d'un élève en classe ou dans un devoir ? Comment ces enseignants réussissent-ils à comprendre l'origine des erreurs ? Comment distinguent-ils entre des erreurs de diverses profondeurs ? Comment analysent-ils leur propre production en matière de questionnements ?

- Quelles sont les stratégies éventuellement utilisées par les enseignants pour remédier aux erreurs repérées ? Quelles sont les effets comparés de ces diverses stratégies sur les élèves ?

- Pour les apprenants de divers niveaux scolaires, comment voient-ils et "vivent"-ils l'erreur en mathématiques, à l'oral et à l'écrit ?

- Quels sont les divers comportements des enseignants devant une production erronée involontaire de leur part ? Quelles sont les réactions des élèves devant une telle situation ?

A partir de ces informations il serait possible d'envisager des outils destinés à la formation initiale ou continue des enseignants afin qu'ils puissent mettre à profit dans leur enseignement une "pédagogie de l'erreur" efficace, capable de dédramatiser une production erronée jusqu'à en montrer les aspects positifs. Une telle recherche devrait aussi permettre d'augmenter l'expertise pédagogique pour ce qui traite de la remédiation et donc de favoriser la création de tutoriels plus "intelligents" et mieux adaptés à la formation individualisée.

VI.4.2 Influence des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication sur l'évolution de certains contenus et de certaines méthodes de l'enseignement des mathématiques : niveaux secondaire et supérieur (en particulier par l'utilisation d'outils issus de l'Intelligence Artificielle)

Poursuivant dans le sens des recherches actuellement menées à l'I.N.R.P. sur "limites et infini" et sur "les méthodes de l'I.A. pour l'enseignement des mathématiques", il s'agirait d'étudier les différents programmes des niveaux secondaire et supérieur (de la 6ème au

D.E.U.G.) en tenant compte des outils technologiques disponibles ou intellectuellement accessibles suivant les âges et les types d'établissements scolaires, de repérer les concepts pouvant être présentés différemment ou à des moments différents du cursus scolaire, d'expérimenter des logiciels (au sens large) existants ou construits ad hoc, de bâtir des séquences didactiques faisant intervenir ces logiciels. Ce travail devrait évidemment s'appuyer sur les travaux existants tant en France qu'à l'étranger et déboucher sur des propositions concrètes pour les décideurs.

VI.4.3 Etude de l'influence des "décors" sur le raisonnement en mathématiques appliquées (écoles et collèges en particulier)

Une telle recherche auprès d'élèves et d'enseignants de ces niveaux consisterait en l'étude des paramètres influençant le raisonnement lors de la résolution de problèmes de mathématiques appliquées.

Comment faire apprendre des mathématiques aux enfants sans les perdre dans des difficultés extra-mathématiques tout en leur permettant de transférer leur savoir "théorique" à des situations de leur vie d'enfants ou d'adolescents ?

Comment présenter aux enseignants puis aux apprenants les difficultés d'un tel transfert, en particulier celles liées à la logique et au langage ?

Comment aider les enseignants à construire des questionnements adaptés à une problématique d'application des mathématiques ?

Comment aider les apprenants à modéliser des situations "concrètes" et à utiliser des acquis en mathématiques "théoriques" ?

Une telle recherche aurait intérêt à s'appuyer sur des activités pluridisciplinaires. Elle devrait déboucher sur des outils destinés à la formation initiale et continue des maîtres.

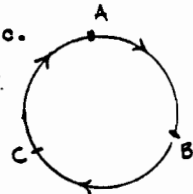
ANNEXE:

Tests extraits de la thèse de Luis RADFORD

NOM: _____ NE(E) LE _____

PREMIERE PARTIE

I. Un circuit électrique intermittent comporte trois lampes A,B,C. Chacune s'allume et s'éteint dans l'ordre A, B, C, A, B, C, A, etc. Pendant l'allumage chaque lampe émet soit une lumière rouge, soit une lumière bleue. Le fonctionnement du circuit est régi par un ordinateur dont on ne connaît pas le programme. Un observateur a suivi pendant un long temps le déroulement du circuit et il a dégagé la règle que voici:



Si C est rouge, alors à l'instant suivant A ne sera pas bleue

On admet désormais que cette règle est vraie.

Dans le tableau ci-dessous, on indique ce qu'a vu l'observateur à un instant donné, que l'on désigne dans tous les cas par t_0 . On suppose que l'observateur n'a pas regardé ce qui se passait à l'instant précédent, noté t_{-1} . L'instant qui suit t_0 sera noté t_{+1} . Cochez les conclusions justes.

R
F
A

Observation faite à l'instant t_0		rouge	bleue	on ne peut pas savoir	
6 C n'est pas rouge	A l'instant t_{+1} A sera: P1N	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	93 56 4
19 A est rouge	A l'instant t_{-1} C était: P2N	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	22 122 9
5 A est bleue	A l'instant t_{-1} C était: P3N	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	110 36 7

II. Un deuxième circuit est mis en place. Un observateur a suivi pendant un long temps le déroulement de ce circuit et il a dégagé les deux règles que voici:

- (1) Si C est rouge, alors à l'instant suivant A sera bleue.
 (2) Si B n'est pas rouge, alors à l'instant suivant C sera bleue.

On admet désormais que ces deux règles sont vraies.

En posant t_0 , t_{-1} et t_{+1} comme ci-dessus, cochez les conclusions justes.

Observation faite à l'instant t_0		rouge	bleue	On ne peut pas savoir	
7 C n'est pas rouge	A l'instant t_{+1} A sera: P1A	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	95 48 10
9 B est rouge	A l'instant t_{+1} C sera: PN1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	86 54 13
20 A est bleue	A l'instant t_{-1} C était: P2A	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	23 125 5
8 A n'est pas bleue	A l'instant t_{-1} C était: PCA	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	97 49 7
18 C est bleue	A l'instant t_{-1} B était: PN2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	28 110 15
12 C n'est pas bleue	A l'instant t_{-1} B était: PNC	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16 46 21

DEUXIEME PARTIE

En puisant dans un stock de boules numérotées, les unes de couleur blanche et les autres de couleur noire, on a placé dans une urne un certain nombre de ces boules.

Ci-dessous on donne quatre procédures. Il s'agit de déterminer lesquelles me permettront de répondre à la question suivante:

Est-ce que, dans l'urne, toutes les boules blanches ont un numéro pair?

Procédure 1: Je fais extraire de l'urne les boules blanches, puis je regarde les numéros des boules ainsi extraites.

Procédure 2: Je fais extraire de l'urne les boules noires, puis je regarde les numéros des boules ainsi extraites.

Procédure 3: Je fais extraire de l'urne les boules qui ont un numéro pair, puis je regarde la couleur des boules ainsi extraites.

Procédure 4: Je fais extraire de l'urne les boules qui ont un numéro impair, puis je regarde la couleur des boules ainsi extraites.

	La procédure	me permettra sûrement de conclure	risque de ne pas me permettre de conclure	
3	1	<input type="checkbox"/> BBC	<input type="checkbox"/>	128 25 0
2	2	<input type="checkbox"/> BNC (Type d ₁)	<input type="checkbox"/>	130 23 0
13	3	<input type="checkbox"/> BPK (Type d ₂)	<input type="checkbox"/>	84 69 0
10	4	<input type="checkbox"/> BIK (contraposée)	<input type="checkbox"/>	94 59 0

TROISIEME PARTIE

Un circuit électrique intermittent comporte trois lampes A, B, C. Chacune s'allume et s'éteint dans l'ordre A, B, C, A, B, C, A, etc. Pendant l'allumage chaque lampe émet soit une lumière rouge, soit une lumière bleue.

Le choix des couleurs d'allumage est régi par un ordinateur programmé comme suit:

- 1) Si C est rouge, alors au moment suivant A sera rouge.
- 2) Si C est bleue, alors au moment suivant A pourra être rouge ou bleue. Pour déterminer la couleur de A, on a recours à un sous-programme appelé "Pile ou Face" donnant à la couleur rouge autant de chances d'être choisie qu'à la couleur bleue.
- 3) Si B est rouge, alors au moment suivant C sera bleue.
- 4) Si B est bleue, alors au moment suivant C pourra être rouge ou bleue. Pour déterminer la couleur de C on a recours au sous-programme "Pile ou Face".
- 5) Si A est bleue, alors au moment suivant B est rouge. .
- 6) Si A est rouge, alors au moment suivant B pourra être rouge ou bleue. Pour déterminer la couleur de B on a recours au sous-programme "Pile ou Face".

Cochez les conclusions justes:

I. Sachant qu'à un moment donné B est bleue,

1. Au moment précédent A était:

4	<input type="checkbox"/> rouge	<input type="checkbox"/> bleue	CRV	<input type="checkbox"/> on ne peut pas savoir	112 38 3
---	-----------------------------------	-----------------------------------	-----	------------------------------------------------------	----------------

2. Au moment suivant C sera:

1	<input type="checkbox"/> rouge	<input type="checkbox"/> bleue	CMP	<input type="checkbox"/> on ne peut pas savoir	134 10 9
---	-----------------------------------	-----------------------------------	-----	------------------------------------------------------	----------------

II. Sachant qu'à un moment donné A est rouge,

1. Au moment précédent C était:

14	<input type="checkbox"/> rouge	<input type="checkbox"/> bleue	CRI	<input type="checkbox"/> on ne peut pas savoir	72 67 14
----	-----------------------------------	-----------------------------------	-----	------------------------------------------------------	----------------

QUATRIEME PARTIE

Soit F l'ensemble $F = \{p, q, r\}$. On suppose qu'un sous-ensemble Y de F vérifie les deux propriétés que voici :

- (1) $r \notin Y \Rightarrow q \in \complement Y$, où $\complement Y$ est le complémentaire de Y dans F .
- (2) $q \in Y \Rightarrow p \notin \complement Y$.

1. Que peut-on dire de q dans chacun des cas suivants?
- 15 1er cas: $r \in Y$. Réponse: ENI 45
44
24
- 16 2ème cas: $p \notin \complement Y$. Réponse: ENI 47
73
33
2. Que peut-on dire de p si $q \notin Y$?
- 17 Réponse: ENI 41
74
36
- 11 3. Que peut-on dire de r si $q \notin \complement Y$?
- Réponse: ENC 81
25
47

NOM _____ NE(E) LE _____

PREMIERE PARTIE

En puisant dans un stock de boules numérotées, les unes de couleur bleue et les autres de couleur rouge, on a placé dans une urne un certain nombre de ces boules.

Ci-dessous on donne quatre procédures. Il s'agit de déterminer lesquelles me permettront de répondre à la question suivante:

Est-ce que, dans l'urne, toutes les boules bleues ont un numéro impair?

Procédure 1: Je fais extraire de l'urne les boules bleues, puis je regarde les numéros des boules ainsi extraites.

Procédure 2: Je fais extraire de l'urne les boules rouges, puis je regarde les numéros des boules ainsi extraites.

Procédure 3: Je fais extraire de l'urne les boules qui ont un numéro impair, puis je regarde la couleur des boules ainsi extraites.

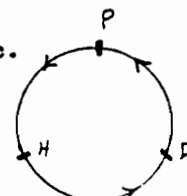
Procédure 4: Je fais extraire de l'urne les boules qui ont un numéro pair, puis je regarde la couleur des boules ainsi extraites.

R
F
A

	Là procédure	me permettra sûrement de conclure	risque de ne pas me permettre de conclure	
3	1	<input type="checkbox"/> BBC	<input type="checkbox"/>	136 25 2
2	2	<input type="checkbox"/> BRC (Type d ₁)	<input type="checkbox"/>	144 17 2
7	3	<input type="checkbox"/> BIK (Type d ₂)	<input type="checkbox"/>	80 81 2
9	4	<input type="checkbox"/> BPK (contraposée)	<input type="checkbox"/>	79 82 2

DEUXIEME PARTIE

Un circuit électrique intermittent comporte trois lampes P, H, D. Chacune s'allume et s'éteint dans l'ordre P, H, D, P, H, D, P, etc. Pendant l'allumage chaque lampe émet soit une lumière jaune, soit une lumière verte. Le fonctionnement du circuit est régi par un ordinateur dont on ne connaît pas le programme.



Un observateur a suivi pendant un long temps le déroulement du circuit et il a dégagé les deux règles que voici :

- (1) Si P n'est pas jaune, alors à l'instant suivant H sera verte.
- (2) Si H est jaune, alors à l'instant suivant D ne sera pas verte.

On admet désormais que ces deux règles sont vraies.

Dans le tableau ci-dessous, on indique ce qu'a vu l'observateur à un instant donné, que l'on désigne dans tous les cas par t_0 . On suppose que l'observateur n'a pas regardé ce qui se passait à l'instant précédent, noté t_{-1} . L'instant qui suit t_0 sera noté t_{+1} . Cochez les conclusions justes.

Observation faite à l'instant t_0		jaune	verte	on ne peut pas savoir	
10 H n'est pas jaune	A l'instant t_{+1} , D sera: <i>P1N</i>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	70 86 7
8 P est jaune	A l'instant t_{+1} , H sera: <i>PN1</i>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	88 67 8
20 D n'est pas verte	A l'instant t_{-1} , H était: <i>P2N</i>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	18 138 7
13 H est jaune	A l'instant t_{-1} , P était: <i>PNC</i>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	55 91 17

TROISIEME PARTIE

Un circuit électrique intermittent comporte trois lampes P, H, D. Chacune s'allume et s'éteint dans l'ordre P, H, D, P, H, D, P, etc. Pendant l'allumage chaque lampe émet soit une lumière jaune, soit une lumière verte.

Le choix des couleurs d'allumage est régi par un ordinateur programmé comme suit:

- 1) Si H est jaune, alors au moment suivant D sera jaune.
- 2) Si H est verte, alors au moment suivant D pourra être jaune ou Verte. Pour déterminer la couleur de D, on a recours à un sous-programme appelé "Pile ou Face" donnant à la couleur jaune autant de Chances d'être choisie qu'à la couleur verte.
- 3) Si P est jaune, alors au moment suivant H sera verte.
- 4) Si P est verte, alors au moment suivant H pourra être jaune ou verte. Pour déterminer la couleur de H on a recours au sous-programme "Pile ou Face".
- 5) Si D est verte, alors au moment suivant P est jaune.
- 6) Si D est jaune, alors au moment suivant P pourra être jaune ou verte. Pour déterminer la couleur de P on a recours au sous-programme "Pile ou Face".

Cochez les conclusions justes:

I. Sachant qu'à un moment donné P est verte,

- 4
1. Au moment précédent D était:
- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----|--------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | CRV | <input type="checkbox"/> | 118 |
| jaune | verte | | on ne peut pas | 42 |
| | | | savoir | 3 |
2. Au moment suivant H sera:
- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----|--------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | CHP | <input type="checkbox"/> | 150 |
| jaune | verte | | on ne peut pas | 10 |
| | | | savoir | 3 |

II. Sachant qu'à un moment donné D est jaune,

- 11
1. Au moment précédent H était:
- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----|--------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | CRJ | <input type="checkbox"/> | 74 |
| jaune | verte | | on ne peut pas | 80 |
| | | | savoir | 9 |

QUATRIEME PARTIE

I. Soit E l'ensemble $E = \{a, b, c\}$. On suppose qu'un sous-ensemble X de E vérifie les deux propriétés que voici:

- (1) $c \in X \implies a \in \complement X$, où $\complement X$ est le complémentaire de X dans E.
(2) $b \notin X \implies c \in \complement X$.

17	1. Que peut-on dire de a si $c \notin X$? Réponse: _____ <u>E1A</u> _____ _____	39 100 24
16	2. Que peut-on dire de c dans chacun des cas suivants? 1er cas: $a \in \complement X$. Réponse: _____ <u>E2A</u> _____ _____	48 100 15
5	2ème cas: $a \notin \complement X$. Réponse: _____ <u>ECA</u> _____ _____	102 33 28
15	3ème cas: $b \in X$. Réponse: _____ <u>EN1</u> _____ _____	35 97 31
18	3. Que peut-on dire de b dans chacun des cas suivants? 1er cas: $c \notin X$. Réponse: _____ <u>EN2</u> _____ _____	43 61 59
12	2ème cas: $c \in X$. Réponse: _____ <u>ENC</u> _____ _____	55 44 64

BIBLIOGRAPHIE

<ADD75> ADDA J. *L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques* NICO 1975

<ADD76a> ADDA J. *Difficultés liées à la présentation des questions en mathématiques* E.S.M. 7 pp. 3 - 22 1976

<ADD76b> ADDA J. *A propos des évaluations en mathématiques: du questionnement à l'interprétation et au diagnostic* DD7. U.E.R. de Didactique des Disciplines, Université Paris 7 1976

<ADD87> ADDA J. *Erreurs provoquées par les présentations* in "Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique" Compte rendu de la 39ème Rencontre de la CIEAEM 27 juillet - 1er août 1987 Sherbrooke (Canada) pp. 329-335 Les Editions de l'Université de Sherbrooke 1988

<ADD88> ADDA J. *La question "pourquoi" dans les questionnements scolaires. Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp.1-8 1988*

<AIE88> AIELLO L., CAROSIO M., MICARELLI A. *An Intelligent Tutoring System for the study of mathematical functions* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal pp. 170-175 1988

<ANT88> ANTIBI A. *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions.* Thèse de Doctorat d'Etat Université Paul Sabatier de Toulouse 330 p. 1988

<ARS88> ARSAC J. *L'intelligence artificielle et l'EAO face au problème du sens* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal pp. 1-4 1988

<ART88> Ouvrage collectif *Artificial intelligence and human learning (Intelligent C.A.I.)* Ed. by John SELF, Chapman and Hall, London, New-York 432 p. 1988

<ATT84> ATTISHA M., YAZDANI M. *An Expert System for diagnosing children's multiplication errors* Instructional Science 13 pp. 79-92 1984

<BAR88> BARRAS H. *Q.C.M de physique sur Minitel en télé-enseignement - niveau D.E.U.G.* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. pp. 37-50 1988

<BID76> BIDEAUD J. *L'acquisition de la notion d'inclusion* Monographies françaises de psychologie n°34 C.N.R.S. 1976

<BOX88> BOXUS-LECLERCQ E. *Le principe des Q.C.M. à solutions générales appliqué aux examens à livres ouverts* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 318-331 1988

<BRO78> BROWN J.S., BURTON R. *Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills* Cognitive Science 2 pp.155-192 1978

<BRO81> BROWN J.S., SLEEMAN D.H. *Intelligent Tutoring Systems* Academic Press 1981

<CAR86> CARDINET J. *Evaluation scolaire et pratique* Pédagogies en développement. Recueils De Boeck Université Bruxelles 1986

<CHA70> CHASTENET de GERY J. *Sur une correction automatique des examens* Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 207 pp. 361-365 1970

<CHA77> CHASTENET de GERY J. *Les expériences d'Enseignement Assisté par Ordinateur et autres machines au C.N.A.M. en Mathématiques.* Bulletin de Psychologie XXX n°17 pp. 890-892 1976-77

<CHA85> CHASTENET de GERY J., DUMONT B. et al. *Computer assisted testing by questions and answers* Proceedings of the 4th World Conference on Computers in Education. Part 1 (North-Holland) pp. 311-318 1985

<CHA87> CHASTENET de GERY J. *Quelques pistes pour la détection, le diagnostic et le traitement des erreurs dans l'apprentissage des mathématiques.* in "Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique" Compte rendu de la 39ème Rencontre de la CIEAEM 27 juillet - 1er août 1987 Sherbrooke (Canada) pp. 178-181 Les Editions de l'Université de Sherbrooke 1988

<CHA88> CHASTENET de GERY J. *Faut-il qu'un questionnaire soit ouvert ou fermé?* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. pp. 62-68 1988

<CLA82> CLANCEY W. *GUIDON* in BARR A., FEIGENBAUM E.A. "The handbook of artificial intelligence" chapitre: Applications. Oriented AI research : education pp.267-278 William Kaufmann Inc. Los Altos 1982

<CUP85> CUPPENS R. *La démonstration automatique en géométrie élémentaire* Bulletin IREM-APMEP Toulouse n° 94 1985

<DAM6> DAMIN G. *Docimologie en QCM.* Collection Renovation Pédagogique n° 18, C.R.D.P. Toulouse 132 p. 1986

<DEL79> De LANDSHEERE G. *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation* PUF Paris 1979

<DIL88> DILLON J.T. *Questioning and Teaching. A Manual of Practice* Croom Helm London & Sydney 1988

<DRO87> DROUHARD J.-Ph. *Analyse linguistique d'erreurs en algèbre élémentaire* in "Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique" Compte rendu de la 39ème Rencontre de la CIEAEM 27 juillet - 1er août 1987 Sherbrooke (Canada) pp. 300-304 Les Editions de l'Université de Sherbrooke 1988

<DUC73> DUCROT O. *La preuve et le dire* Repères. Série bleue. MAME 1973

<DUM77> DUMONT B. *Compte-rendu d'une expérience d'enseignement de mathématiques assisté par ordinateur* E.S.I.E.E. (Marne-la-Vallée) 55 p. 1977

<DUM80a> DUMONT B. *L'influence du langage et du contexte dans des épreuves de type "logique" (Analyse des comportements d'une population très hétérogène en face de tests portant apparemment sur l'implication)* Thèse de 3ème cycle, Université PARIS 7. 111 p. plus annexes 1980

<DUM80b> DUMONT B. *Exemples d'abus dans l'utilisation de certaines méthodes statistiques en didactique des mathématiques* "Méthodes et Methodologies dans les recherches didactiques" Journées Didactiques 1980 U.E.R. de Didactique des Disciplines Université Paris 7

<DUM81> DUMONT B. *Importance des facteurs linguistiques dans la résolution de problèmes dits "logiques" portant -apparemment- sur l'implication* Actes du IIème colloque "Langage et acquisition du langage" MONS in R.P.A. n°57 pp. 21-33 1981

<DUM82a> DUMONT B. *PLATO(N): Un système d'enseignement assisté par ordinateur adéquat à l'enseignement des mathématiques* "L'information dans l'éducation scientifique", IVème Journées Internationales sur l'Education Scientifique. pp. 169-173 1982

<DUM82b> DUMONT B. *L'influence du "décor" et du langage dans des épreuves de type "logique" portant sur l'implication* Educational Studies in Mathematics vol. 13 pp. 409-429 1982

<DUM83> DUMONT B. *L'expérience de la B.B.C. en micro-informatique* U.E.R. de Didactique, Université Paris 7 37 p. 1983

<DUM84a> DUMONT B. *De la maternelle à l'Université: vraies et fausses règles d'écriture des fractions. (Exemple de difficultés liées à la synonymie dans le langage mathématique)* Actes des VIèmes Journées Internationales sur l'Enseignement Scientifique Chamonix 1984

<DUM84b> DUMONT B. *"Je ne sais pas si on ne peut pas savoir" (biais relationnels dans des questionnaires cognitifs)* Actes du Colloque "Les modes de raisonnement", Association pour la Recherche Cognitive pp. 140-158 1984

<DUM84c> DUMONT B. *Rapport de recherche : Enquête sur les fractions* U.E.R de Didactique des Disciplines. Université Paris 7. 67 p. 1984

<DUM85a> DUMONT B. *L'expérience et les expériences de la Télé-université dans la formation à distance en informatique d'adultes au Québec* Actes des VIIèmes Journées Internationales sur l'Education Scientifique Chamonix 1985

<DUM86a> DUMONT B. *Le téléchargement de logiciels pour l'Education* Rapport pour l'U.N.E.S.C.O. 44 p. 1986

<DUM86b> DUMONT B. *"Un ordinateur pour faire autrement des mathématiques et faire d'autres mathématiques" (Réflexions et propositions didactiques sur l'utilisation collective de l'ordinateur graphique)* Actes du Colloque "Du tableau noir à l'ordinateur graphique" C.N.A.M. 1986

<DUM86c> DUMONT B. *Télématique, téléchargement et enseignement supérieur à distance* Actes du Colloque "Technologie des communications et éducation supérieure à distance" Moncton (Canada) 1986

<DUM86d> DUMONT B. *New technologies in Education : New access to information, New hierarchy of communication* Proceedings of the 2d International Conference "Children in the Information Age" (Invited paper) mai 1986 Sofia (Bulgarie) Pergamon Press 1988

<DUM87a> DUMONT B. *Quelques aspects de l'introduction des technologies nouvelles dans l'enseignement en France: apprentissage en interaction, apprentissage de l'interactivité, au travers de recherche menées à l'I.N.R.P* Atelier de recherche pédagogique sur l'apprentissage en interaction et les nouvelles technologies. Conseil de l'Europe (conférencier invité) Eindhoven (Pays-Bas) 1987

<DUM87b> DUMONT B. *La détection d'erreurs de calcul* Actes de l'Université d'été "Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques" (conférencier invité) Toulouse pp. 131-137 1987

<DUM87c> DUMONT B. *Some ideas about educational software development* De POCO-CONFERENTIES, Educational Computing Consortium B.V., ENSCHEDE (N.L.) pp. 224-239 1987

<DUM88> DUMONT B. *La construction d'outils d'apprentissage et le choix des médias dans l'enseignement à distance* Supplément à Education Permanente "L'audit des cours par correspondance à E.D.F.-G.D.F." pp.22-27 1988

<ERR87> Ouvrage collectif *Le statut de l'erreur dans l'enseignement en CM2 et en 6ème* Rapport de l'équipe de recherche Articulation Ecole-Collège. I.N.R.P.-DP1 205 p. 1987

<FIS79> FISCHER J.P. *La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction* Thèse de 3ème cycle Strasbourg 1979

<FRE72> FREUDENTHAL H. *Mathematics as an educational task* D. Reidel Publishing Company 1972.

<GIO88> GIORDINA M. et al. *BIOMEC : modélisation et développement d'un module d'apprentissage intelligent utilisant le vidéodisque interactif* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal pp. 448-453 1988

<GRO88> GROSSEL J. *Utilisation d'un double questionnaire pour analyser certains comportements mathématiques des étudiants et leur capacité à s'autocorriger* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp.192-213 1988

<GUE88> GUERRA T.-M. *Introduction de la subjectivité dans la formulation et le traitement de questionnaires fermés* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 214-237 1988

<HEB87> HEBENSTREIT J. *Le rôle des jeux éducatifs à l'école. Entrevue de Bernard DUMONT avec Jacques HEBENSTREIT.* Les logiciels de l'éducation. Magazine n°3. Cours de la Télé-université (Québec, Canada) pp. 44-48 1987

<HOC83> HOCQUENGHEM S., DUMONT B. et al. *Propositions en vue de la réalisation d'un logiciel d'affichage et de gestion d'écran pour des exercices de mathématiques assistés par ordinateur (mode création et mode réponse)* U.E.R de Didactique des Disciplines Université Paris 7 13 p. 1983

<HOC88> HOCQUENGHEM S. *Réponses à choix multiples, processus de fuite et méthode du crible en mathématiques sur ordinateur* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 255-269 1988

<JOH72> JOHNSON-LAIRD P.N., LEGRENZI P., LEGRENZI M.S. *Reasoning and a sense of reality* BRITISH J. PSYCHOL., 63 pp. 395-400 1972

<JUR77> JURDAK M. *Structural and linguistic variables in selected inference patterns for bilinguals in grade six to ten* E.S.M. 8 pp.225-238 1977

<LAC84a> LACOMBE D. *Spécificités du langage mathématique et difficultés pédagogiques résultantes* Actes des 9èmes Journées de Chamonix "Signes et discours dans l'Education Scientifique" U.E.R. de Didactique des Disciplines Université Paris 7 1984

<LAC84b> LACOMBE D. *Les composantes du "raisonnement" mathématique* Actes du Colloque de l'ARC 1984 reproduit dans le Bulletin de liaison n°2 de la Commission Inter-IREM "Mathématiques et Intelligence Artificielle" pp. 87-96 1988

<LAC87> LACOMBE D. *Commentaire sur l'enquête précédente* Actes du colloque "Orientation et échecs dans l'enseignement supérieur et dans le secondaire. Commission II : Bilan des acquis scientifiques" Université de Paris-Dauphine

<LAC88> LACOMBE D., DROUHARD J.-Ph. *Applications d'un test de niveau mathématique à des étudiants de 1er cycle universitaire de lettres et sciences humaines* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 291-304 1988

<LEC83> LECLERCQ D., DONNAY J., De BAL R. *Construire un cours programmé* Ed. Labor Bruxelles (2ème édition) 1977

<LEC83> LECLERCQ D. *Confidence Marking, its use in testing*. Oxford, Pergamon Press 1983

<LEC86> LECLERCQ D. *La conception des questions à choix multiple* Collection Education 2000 Ed. Labor Bruxelles 151 p. 1986

<LEC87> LECLERCQ D. *Qualité des questions et signification des scores avec application aux Q.C.M.* Collection Education 2000 Ed. Labor Bruxelles 173 p. 1987

<LEC88> LECLERCQ D. *Mesurer la connaissance partielle et le réalisme par les degrés de certitude* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 305-317 1988

<LED88> LE DOSSEUR Y., CHABOT J.M. *Autoeval : pour une utilisation réfléchie de l'auto-évaluation des connaissances en Médecine* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 332-343 1988

<LEG83> LEGRAND M. *Les cosmonautes* Compte rendu d'une recherche effectuée par le groupe "Apprentissage du raisonnement" de l'I.R.E.M. de Grenoble. "petit x", n°1, I.R.E.M. de Grenoble pp.57-73 1983

<LEP88> LEPPER M.R., CHABAY R.W *Socializing the Intelligent Tutor : Bringing Empathy to Computer Tutors* in MANDL H., LESGOLD A. "Learning Issues for Intelligent Tutoring Systems" Springer-Verlag. pp.242-257 1988

<LON67> LONGEOT F. *Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence* Thèse de 3ème cycle. E.P.H.E. 1967

<LON76> LONGEOT F. *Homogénéité des stades de développement de la pensée opératoire* Thèse d'état Université Paris 5 .11juin 1976 . 512 p. Ed. Université Lille 3 . 1978.

<MAN88> Ouvrage collectif, MANDL H., LESGOLD A. (Editors) *Learning Issues for Intelligent Tutoring Systems* Springer-Verlag 307 p. 1988

<MAT62> MATALON B. *Etude génétique de l'implication* Etudes d'épistémologie génétique XVI Paris PUF pp. 69-97

<MAU88> MAURY S. *Etude procédurale de la résolution de problèmes probabilistes : quels enseignements pour une utilisation des questionnaires fermés ?* Actes du Colloque International "Formation, Evaluation, Sélection par questionnaires fermés". E.S.I.E.E. - Marne -la-Vallée. pp. 344-356 1988

<NAD77> NADAR N. *Children's conditional reasoning (Part I)* E.S.M. 8 1977

<NAD78> NADAR N. HENKIN L. *Children's conditional reasoning (Part II)* ES.M. 9 1978

<NAD78> NADAR N. *Children's conditional reasoning (Part III)* ES.M. 9 1978

<NIC88a> NICAUD J.F. *APPLUSIX : Un système expert de résolution pédagogique d'exercices d'algèbre* Bulletin de liaison n°1 de la Commission Inter-IREM "Mathématiques et Intelligence Artificielle" pp. 41-74 1988

<NIC88b> NICAUD J.F., VIVET M. *Les tuteurs intelligents : réalisations et tendances de recherches* T.S.I. Vol. 7 n° 1 Numéro spécial 1988

<NOI75> NOIZET G., FABRE J.M. *Etude docimologique des questionnaires à choix multiple (Q.C.M.) : Perspectives de recherche.* Scientia Paedogica Experimentalis Vol. 12 1975

<NWA88> NWANA H.S., COXHEAD P. *Towards an Intelligent Tutoring System for Fractions* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal pp. 403-408 1988

<O'BR71> O'BRIEN T. *Logical thinking language and context* E.S.M. 4 pp. 201-219 1971

<O'BR72> O'BRIEN T. *Logical thinking in adolescents* E.S.M. 4 pp. 401-428 1972

<O'BR73> O'BRIEN T. *Logical thinking in college students* E.S.M. 5 pp. 71-79 1973

<O'BR73> O'BRIEN T. *Quasi-child logics* E.S.M. 5 pp. 181-184 1973

<O'BR75> O'BRIEN T. *Deformation and the four card problem* E.S.M. 6 pp. 23-39 1975

<O'SH83> O'SHEA T., SELF J. *Learning and teaching with computers (Artificial Intelligence in Education)* Prentice Hall Inc. 307p. 1983

<O'SH84> O'SHEA T., BORNAT R., Du BOULAY B., EISENSTAD M., PAGE I. *Tools for creating intelligent computer tutors* in "Human and Artificial intelligence" Eds Elithor and Banerjii North Holland 1984

<OFR70> Ouvrage collectif *Questionnement à choix multiple et stations d'interrogation collective* OFRATEME (Division des Applications Expérimentales des Techniques Educatives Nouvelles) (non paginé) 1970

<PAQ87> PAQUELIER Y. *Se tromper avec ou sans raisons ? Vers une poétique de l'erreur* in "Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique" Compte rendu de la 39^{ème} Rencontre de la CIEAEM 27 juillet - 1^{er} août 1987 Sherbrooke (Canada) pp. 187-193 Les Editions de l'Université de Sherbrooke 1988

<PAQ88> PAQUETTE G. *Le développement d'outils intelligents d'apprentissage pour le traitement des connaissances* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal pp. 75-81 1988

<PEL75> PELNARD-CONSIDERE J., LEVASSEUR J. *Le développement de la pensée mathématique de la dixième à la quatrième* Laboratoire de psychologie différentielle, service de recherches de l'I.N.O.P. 96 p. 1975

<PIA63> PIAGET J., INHELDER B. *Les opérations intellectuelles et leur développement* in FRAISSE P., PIAGET J. "Traité de psychologie expérimentale" VII Paris PUF pp.109-155 1963

<PLU77> PLUVINAGE F. *Difficultés des exercices scolaires en mathématique (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités)* Thèse d'Etat, Université Louis Pasteur de Strasbourg 221 p. 1977

<RAD83> RADFORD L. *Etude et remarques aux commentaires exprimés dans une expérience de B. Dumont* Mémoire de D.E.A. Université Louis Pasteur. Strasbourg 14 p. 1983

<RAD85> RADFORD L. *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitements logiques (contributions à la faisabilité d'un enseignement de la logique à l'école)* Thèse de 3^{ème} cycle en didactique des mathématiques Université Louis Pasteur Strasbourg 1985

<REV80> REVUZ A. *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?* PUF 153p. 1980

<SEL86> SELF J. *Artificial intelligence. Its potential in Education and training* 5^{ème} symposium canadien sur la technologie pédagogique Ottawa pp. 69-77 1986

<SIW73> SIWEK H. *Logique formelle et raisonnement naturel des élèves dans l'enseignement de la mathématique* E.S.M. 5 pp. 23-27 1973

<SLE83> SLEEMAN D. *Infering student models for intelligent computer aided instruction* Machine learning ,Tioga Publishing Company pp. 483-510 1983

<SOL 87> SOL G. *Télématique et formation, cas particulier de l'enseignement des mathématiques* Thèse de 3^{ème} cycle, Université Paris 7. 329 p. 1987

<SUP88> SUPPES P. *The Future of Intelligent Tutoring Systems : Problems and Potential* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal 1988

<VIV84> VIVET M. *Expertise mathématique et informatique : CAMELIA; un logiciel pour raisonner et calculer* Thèse d'Etat Université Paris 6 1984

<VIV88> VIVET M., FUTTERSACK M., LABAT J.M. *Métaconnaissance dans les tuteurs intelligents* Actes du Congrès "Systèmes d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur" Montréal pp. 430-434 1988

<WAS68> WASON P.C. *Reasoning about a rule* The Quater vol. XXly Journal of Experimental Psychology 1968

<WEN87> WENGER E. *Artificial Intelligence and Tutoring Systems. Computational and Cognitive Approaches to the Communication of Knowledge*. Morgan Kaufman Publishers Los Altos (Californie) 1987

<WOO77> WOOD R. *Multiple choice questions, the state of the art* Pergamon Oxford 1977

<YAZ84> Ouvrage collectif, YAZDANI M. (Editor) *New horizons in educational computing* Ellis Horwood ltd. 314 p. 1984

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	1
0. POINTS DE REPERES POUR UN ITINERAIRE.....	3
I. IDEES, PRINCIPES & METHODES	13
I.1. IDEES ET PRINCIPES DE BASE	15
I.1.1. Distinction apprentissage / compréhension.....	15
I.1.2. Les erreurs : d'où viennent-elles? quelle signification ont-elles?	15
I.1.3. Une remédiation efficace seulement si l'erreur est interprétée correctement	16
I.1.4. Dans quel but pose-t-on "cette" question ?.....	16
I.2. QUESTIONNEMENTS ET ERREURS	17
I.2.1. Définition d'un questionnaire.....	17
I.2.2. Niveau d'adéquation d'un questionnaire à une évaluation..	17
I.2.3. Profondeur et pertinence des erreurs	17
I.3. ESSAI D'UNE TYPOLOGIE DES QUESTIONNEMENTS. CAS PARTICULIER DES Q.C.M.	20
I.3.1. Questionnement fermé / questionnaire ouvert.....	20
I.3.2. Questionnements à choix multiples.....	21
I.3.3. Les Q.C.M. simples	22
I.3.4. Les Q.C.M. complexes	23
I.3.4.1. Les Q.C.M. de véracité stricte	23
I.3.4.2. Les Q.C.M. de véracité large	25
I.3.4.3. Différents types de Q.C.M. de véracité	26
I.3.4.4. Des Q.C.M. complexes qui ne sont pas de véracité.....	28
I.4. POUR UNE PEDAGOGIE DE L'ERREUR.....	30
I.4.1. Comment favoriser une telle pédagogie ?.....	32
I.4.2. Des outils pour l'enseignement.....	32
I.5. ASPECTS METHODOLOGIQUES LIES A L'UTILISATION DE VASTES POPULATIONS	34
I.5.1. Etablir un catalogue hiérarchisé d'erreurs.....	34
I.5.2. Construire des questionnements.....	34
I.5.3. Bénéficier d'outils statistiques.....	35
I.5.4. Problèmes liés au dépouillement et à l'analyse des réponses.....	35
I.5.5. En conclusion	37

II	UNE CERTAINE IDEE DE L'IMPLICATION	38
II.1.	Situation de ma problématique et publications antérieures à ma thèse de 3ème cycle	39
II.2.	Méthode et moyens de ma recherche.....	48
II.2.1.	Niveau scolaire - Niveau général	50
II.2.2.	Origine géographique - Age	53
II.2.3.	Répartition origine géographique / niveau "général"	53
II.2.4.	Répartition origine géographique/niveau scolaire.....	54
II.2.5.	Répartition âge/origine géographique	54
II.3.	Principaux résultats	57
II.3.1.	L'inexistence du "stade formel" des psychologues.....	57
II.3.2.	L'influence du contexte et du décor dans le comportement de réponse	62
II.3.3.	Problèmes logico-linguistiques liés aux quantifications.....	64
II.3.3.1.	"VRAI", "FAUX"	66
II.3.3.2.	L'absence de variable dans le "si...(alors)..."	67
II.3.3.3.	"JE NE SAIS PAS", "ON NE PEUT PAS SAVOIR",.....	68
II.3.3.3.1.	Présentation du problème.....	68
II.3.3.3.2.	Les tests et les épreuves.....	70
II.3.3.3.3.	Comparaison des deux sous-populations considérées.....	71
II.3.3.3.4.	Comparaison des résultats aux deux épreuves....	73
II.3.3.3.5.	Réussites aux tests sur le droit de vote	76
II.3.3.3.6.	Réussites aux tests "sans contexte"	77
II.3.3.3.7.	Les différents types de réponse	79
II.3.3.3.7.1.	Epreuve 27 - Test J.2'.....	79
II.3.3.3.7.2.	Epreuve 27 - Test B.5.....	80
II.3.3.3.7.3.	Epreuve 28 - Test J.4.....	80
II.3.3.3.7.4.	Epreuve 28 - Test B.1'	81
II.3.3.3.8.	Comportements associés à l'intérieur d'une même épreuve.....	81
II.3.3.3.9.	Cas particulier : "JE NE PEUX PAS SAVOIR"	83
II.4	Exemple de résultats pouvant être obtenus avec une analyse factorielle...85	
II.4.1	Epreuves 27 et 28	85
II.4.2	Epreuve 2 (tests C.1 et B.2) (voir figure II.41).....	91
II.5	Publications postérieures à ma thèse de 3ème cycle	94
II.5.1	L'expérience de l'I.R.E.M. de Grenoble <LEG83>.....	94
II.5.2	La thèse de Luis RADFORD.....	95
II.6	Quelques réflexions d'ensemble	99

II.7 Quelques conclusions utilisables pour l'enseignement et la didactique	
des mathématiques	100
II.7.1 Population scolaire/non scolaire (formation d'adultes)	101
II.7.2 Les grandes populations : utilisations de variantes, recherche des paramètres pertinents	101
II.7.3 Modéliser / mathématiser une situation "concrète"	101
II.7.4 Langage mathématique, langage méta-mathématique et langage dit "naturel"	102
III ENSEIGNEMENT (NON INTELLIGEMMENT)	
ASSISTE PAR ORDINATEUR	103
III.1 Un programme multimédia sur les coniques avec MITSU	104
III.1.1 PRESENTATION DE LA MACHINE MITSU™	104
III.1.2 PRESENTATION DU PROGRAMME	106
III.1.2.1 Choix du support	106
III.1.2.2 Analyse du programme	106
III.1.2.3 Organisation du programme	107
III.1.2.4 Analyse de réponse	107
III.1.3 Quelques remarques pour conclure	110
III.2 Une évaluation en analyse avec DECAL™	111
III.2.1 PRESENTATION DE L'EXPERIENCE	111
III.2.1.1 Présentation du langage-auteur DECAL™	112
III.2.1.2 Organigramme du test	114
III.2.1.3 Construction du questionnaire sur ordinateur	118
III.2.1.4 Modifications effectuées suite à la première version	119
III.2.1.5 Cas particulier : le choix de réponse "JE NE SAIS PAS"	120
III.2.2 D'un point de vue didactique	121
III.2.2.1 Quelques résultats sur les connaissances des étudiants (au travers de leur performance au test)	121
III.2.2.2 Quelques problèmes ou erreurs de conception	122
III.2.2.3 Contraintes d'affichage	124
III.2.3 Conclusions	125
III.2.4 ANNEXE 1	126
III.2.5 ANNEXE 2	127
III.3. Un didacticiel sur les nombres complexes avec PLATO™	147
III.3.1 PRESENTATION DU SUPPORT	147
III.3.1.1 Pourquoi PLATO™ ?	147
III.3.1.2 Les particularités de PLATO™ et de TUTOR™	148
III.3.2 PRESENTATION DU PROJET	149

III.3.2.1	Le public	149
III.3.2.2	Les moyens d'apprentissage.....	149
III.3.2.3	Les thèmes	149
III.3.3 UN DIDACTICIEL D'INTRODUCTION		
	AUX NOMBRES COMPLEXES	150
III.3.3.1	Les raisons du choix.....	150
III.3.3.2	Création et réalisation.....	150
III.3.3.3	Présentation du cours.....	150
	III.3.3.3.1 Plan du cours	150
	III.3.3.3.2 Quelques particularités	151
III.3.3.4	Quelques remarques pour conclure.....	158
III.4	Un diagnostic d'erreurs sur les fractions avec MICRAL™.....	159
III.4.1 L'HISTORIQUE DE LA RECHERCHE.....		
III.4.1.1	Une évaluation à l'entrée dans l'enseignement supérieur	159
III.4.1.2	L'intérêt des T.A.O.....	159
III.4.1.3	Le projet dans son ensemble.....	160
III.4.2 METHODOLOGIE DE CONSTRUCTION DE T.A.O.....		
III.4.2.1	Objectifs généraux	160
III.4.2.2	L'utilité d'enquêtes.....	161
III.4.3 UN LOGICIEL SUR LE CALCUL DES FRACTIONS.....		
III.4.3.1	L'enquête sur les fractions.....	161
III.4.3.2	La maquette sur MICRAL.....	161
III.4.3.3	Expérimentations passée et future de la maquette	166
IV	ERREURS ET INTELLIGENCE ARTIFICIELLE	167
IV.1 FRACT: un exemple de construction d'un Système Pédagogique à Base d'Erreurs d'Elèves		
IV.1.1	Aspects méthodologiques. Répartition de nos objectifs dans le temps.	170
IV.1.2	L'historique de la recherche.....	170
	IV.1.2.1 Première étape.....	170
	IV.1.2.2 Deuxième étape.....	171
	IV.1.2.3 Troisième étape.....	171
IV.1.3	La première enquête	172
	IV.1.3.1 Construction des tests et organisation de l'enquête... ..	172
	IV.1.3.2 Remarques générales et résultats principaux.....	174
IV.1.4	La seconde enquête	181
	IV.1.4.1 Organisation de l'enquête.....	181
	IV.1.4.2 Résultats au niveau 1	184

IV.1.4.2.1	Simplifications simples (numérateurs et dénominateurs : nombres à deux chiffres)	184
IV.1.4.2.2	Exercices du type $(A+B)/C$	184
IV.1.4.2.3	Exercices du type : $[(Ax+B) \pm C] / D$	185
IV.1.4.2.4	Somme ou différence de deux fractions.....	185
IV.1.4.3	Résultats au niveau 2	186
IV.1.5	Complément : résultats d'une enquête anglaise récente.....	188
IV.1.6	Présentation de FRACT-1	194
IV.1.6.1	Un outil pour la recherche en didactique.....	195
IV.1.6.2	Un outil pour la formation des maîtres.....	198
IV.1.7	Présentation de FRACT-2	198
IV.2	Intelligence artificielle et éducation.....	204
IV.2.1	Bref historique et éléments pour un état de l'art.....	204
IV.2.2	Quelques exemples de réalisations, utilisant des méthodes d'Intelligence Artificielle, pour l'enseignement des mathématiques	207
IV.2.2.1	WEST (R.R. BURTON & J.S. BROWN)	207
IV.2.2.2	BUGGY, DEBUGGY, IDEBUGGY	208
IV.2.2.3	SEDAF (L. AIELLO, M. CAROSIO, A. MICARELLI).....	209
IV.2.2.4	AMALIA (M. VIVET) et APLUSIX (J.-F. NICAUD)....	210
IV.2.3	Tutoriels Intelligents vs Systèmes à Base de Connaissances.....	210
V.	EXEMPLES DE Q.C.M. EN MATHEMATIQUES	215
V.1	Des Q.C.M. pour une sélection: les concours de l'E.S.I.E.E.....	216
V.1.1	ORGANISATION DES CONCOURS DE L'E.S.I.E.E.	216
V.1.1.1	Présentation de l'E.S.I.E.E.....	216
V.1.1.2	Origine, évolution et organisation du concours.....	216
V.1.1.2.1	Organisation du concours 1983.....	217
V.1.1.2.2	Présentation des concours suivants.....	217
V.1.1.3	Conséquences de l'introduction du concours dans le processus de recrutement.....	220
V.1.1.4	Problème ouvert sur des questionnements fermés.....	222
V.1.2	L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES AU CONCOURS DE L'E.S.I.E.E.....	223
V.1.2.1	Méthodologie de construction.....	223
V.1.2.2	Les stratégies de réponse à l'épreuve complète. Leur évolution.	225
V.1.2.3	Des connaissances sur les connaissances des candidats. Leur évolution.	231
V.1.2.3.1	Exemples 1: Trigonométrie.....	232

V.1.2.3.2	Exemples 2: Suites.....	233
V.1.2.4	Des exercices mal construits. Des exercices bien construits.	234
V.1.2.4.1	Exemple d'exercice de type 1 bien construit...	235
V.1.2.4.2	Exemple d'exercice de type 1 mal construit...	235
V.1.2.4.3	Exemple d'exercice de type 2 bien construit...	236
V.1.2.4.4	Exemple d'exercice de type 2 mal construit...	237
V.1.3	QUELQUES REMARQUES PROSPECTIVES	238
V.1.4	INTERVIEW D'UN PARFAIT QCMiste.....	239
V.2	Des Q.C.M. pour une recherche en didactique: "limites et infini".....	248
V.2.1	SITUATION DE L'ETUDE	248
V.2.2	CREATION DE LA BANQUE D'EXERCICES MULTIVARIANTS	249
V.2.2.1	Paramètre commun à toutes les séries.....	249
V.2.2.2	Présentation des différents exercices.....	249
V.2.2.2.1	Série C	249
V.2.2.2.2	Exercice D.....	249
V.2.2.2.3	Série E	250
V.2.2.2.4	Série G	250
V.2.2.2.5	Série I	250
V.2.2.2.6	Série R	250
V.2.2.3	Composition des épreuves.....	251
V.2.2.4	Population testée	251
V.2.3	RESULTATS GLOBAUX	251
V.2.3.1	Résultats obtenus suivant l'origine des testés.....	251
V.2.3.2	Comparaison V/F-O/N	252
V.2.3.3	Temps de passation.....	252
V.2.4	RESULTATS DETAILLES.....	252
V.2.4.1	Comparaison des variantes "Si...alors..." et "Pour tout..."	252
V.2.4.2	Exercices C.1 et C.2.....	253
V.2.4.3	Exercices C.3, C.4, C.5 et C.6.....	256
V.2.4.4	Exercice D	257
V.2.4.5	Exercices E.1, E.2 et E.3.	258
V.2.4.6	Exercice E.5	260
V.2.4.7	Exercices E.6 et E.7.....	261
V.2.4.8	Exercices G.1 et G.2	262
V.2.4.9	Exercices de la série I.....	264
V.2.4.10	Exercices I.1A et I.3A	268
V.2.4.11	Exercices I.2B et I.4B.....	268

V.2.4.12	Exercices I.2A et I.4A	268
V.2.4.13	Exercice I.1B	268
V.2.4.14	Exercice I.3B	269
V.2.4.15	Remarques sur la série I.....	269
V.2.4.16	Exercices série R.....	270
V.2.5	QUELQUES REMARQUES EN CONCLUSION	273
V.3	Des Q.C.M. pour l'enseignement à distance: Q.C.M. télématiques, l'existant et le futur	274
V.3.1	L'existant: ETUDE D'EXERCICES DE MATHÉMATIQUES DISPONIBLES VIA MINITEL.....	274
V.3.1.1	Qualité mathématique des produits	276
V.3.1.2	Qualité pédagogique des produits.....	280
V.3.1.2.1	Choix des exercices.....	280
V.3.1.2.2	Rédaction des textes de question	281
V.3.1.2.3	Types de réponse possibles.....	285
V.3.1.2.4	Commentaires aux réponses incorrectes.....	287
V.3.1.2.5	Le suivi pédagogique.....	289
V.3.1.2.6	Gestion des banques d'exercices.....	290
V.3.1.2.7	Problèmes graphiques.....	291
V.3.1.2.7.1	Les polices de caractères.....	292
V.3.1.2.7.1.1	Les symboles mathématiques	292
V.3.1.2.7.1.2	Produit	294
V.3.1.2.7.1.3	Division.....	294
V.3.1.2.7.1.4	Racine carrée.....	295
V.3.1.2.7.1.5	Puissance	295
V.3.1.2.7.1.6	Inférieur ou égal	295
V.3.1.2.7.1.7	Infini.....	295
V.3.1.2.7.1.8	Implication.....	296
V.3.1.2.7.1.9	Logarithmes.....	296
V.3.1.2.7.1.10	Exponentielles.....	296
V.3.1.2.7.1.11	Les lettres grecques	296
V.3.1.2.7.2	Les courbes et les graphiques.....	296
V.3.1.2.7.3	Quelques difficultés	297
V.3.1.2.7.3.1	..avec les expressions linéaires.....	297
V.3.1.2.7.3.2	...avec le manque d'homogénéité des symboles utilisés.....	297
V.3.2	Le futur: LE PROJET I.N.R.P.-E.S.I.E.E.	298
V.3.2.1	L'analyse des réponses et les commentaires	298
V.3.2.2	Organisation de la banque.....	299

VI. CONCLUSIONS	301
VI.1 RESULTATS	302
VI.1.1 Raisonement / déduction :.....		302
VI.1.1.1 Les représentations des quantifications		302
VI.1.1.2 Implication / équivalence.....		302
VI.1.1.3 "habillages" / "décors".....		303
VI.1.1.4 Vrai / faux		305
VI.1.1.5 Maximum d'information.....		305
VI.1.1.6 Absence de variables dans "si...(alors)..."		305
VI.1.2 Formulation des questions dans des Q.C.M.....		306
VI.1.2.1 Intérêt / pertinence de certains QCM.....		306
VI.1.2.2 La personnalisation du choix de réponse :		
"JE" vs "ON"		306
VI.1.3 Résultats (didactiques) plus ponctuels.....		307
VI.2 OUTILS PEDAGOGIQUES A SUPPORT TECHNOLOGIQUE		307
VI.2.1 des cours programmés.....		308
VI.2.2 des Q.C.M. à support informatisé.....		308
VI.2.3 des outils issus de l'Intelligence Artificielle.....		308
VI.3 POUR RESUMER SANS CONCLURE		309
VI.4 ASPECTS PROSPECTIFS :		
PISTES POUR DE FUTURES RECHERCHES.....		310
VI.4.1 Etude du comportement des enseignants des collèges et des lycées devant une production d'erreurs en classe		310
VI.4.2 Influence des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication sur l'évolution de certains contenus et de certaines méthodes de l'enseignement des mathématiques : niveaux secondaire et supérieur..		310
VI.4.3 Etude de l'influence des "décors" sur le raisonnement en mathématiques appliquées (écoles et collèges en particulier)		311
ANNEXE: Tests extraits de la thèse de Luis RADFORD.....		312
BIBLIOGRAPHIE		323
TABLE DES MATIERES		331